Seria trzecia - interpolacja, splajny

Zadanie 1 Czy możemy stwierdzić że $\|f - w\|_{\infty,[-1,1]} \leq 0.1$ dla funkcji $f(x) = \sin(x)$ i $w(x)$ wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a stopnia co najwyżej dwa takiego, że $\sin(j) = w(j)$ dla $j = -1, 0, 1$.

Zadanie 2 Pokaż, że $\||\Pi_{k=0}^{N}(x - x_k)\|_{\infty,[a,b]} \leq 0.25N!h^{N+1}$ dla $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ i $h = \max_{k=1,\ldots,N} |x_k - x_{k-1}|$. Korzystając z tego wzoru oszacuj błąd $e_{k,3} := \|f_k - w_{k,3}\|_{\infty,[0,10]}$ dla $f_1(x) = \sin(x)$, $f_2 = \log(1 + x)$ i $w_{k,N}$ wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a stopnia co najwyżej N interpolującego funkcję f_k w $N + 1$ węzłach równoodległych.

Zadanie 3 Oszacuj błąd $e_{k,N} := \|f_k - w_{k,N}\|_{\infty,[0,10]}$ dla $f_1(x) = \sin(x)$, $f_2 = \log(1+x)$ i $w_{k,N}$ wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a stopnia co najwyżej N interpolującego funkcję f_k w $N + 1$ węzłach Czebyszewa. Czy w obu przypadkach zachodzi: $e_{k,N} \to 0$ dla $N \to \infty$?

Zadanie 4 Rozpatrzmy w funkcje na $[-1, 2]$ taką, że w obcięte do $[-1, 0]$ jest wielomianem liniowym, w na $[0, 2]$ jest wielomianem kwadratowym (tzn stopnia co najwyżej dwa) oraz $w(k) = f(k)$ dla $k = -1, 0, 1, 2$. Czy taka funkcja w jest wyznaczona jednoznacznie? Oszacuj możliwie dokładnie błąd $e := \|f - w\|_{\infty,[-1,2]}$ dla $f(x) = \sin(4\pi * x)$.

Zadanie 5 Dla danych różnych węzłów $\{x_k\}_{k=0}^{n} \subset [a, b]$ niech $\{l_k\}_{k=0}^{n}$ będzie bazą Lagrange'a $\mathcal{P}_n$ a dla tych węzłów, i niech $L_n f$ wielomian interpolujący daną funkcję ciągłą $f \in C([a, b])$ w tych węzłach. Pokaż , że

$$\|L_n f\|_{\infty,[a,b]} \leq (\sum_{k=0}^{N} \|l_k\|_{\infty,[a,b]})\|f\|_{\infty,[a,b]}.$$

Zadanie 6 (trudne) Pokaż, że dla $k + 1$ różnych punktów różnica dzielona spełnia:

$$f[x_0, \ldots, x_k] = \sum_{j=0}^{k} \frac{f(x_j)}{\Pi_{\substack{i=0\\i\neq j}}^{k}(x_j - x_i)}$$

Zadanie 7 Niech $(x_k)_{k=0}^{n}$ będą różnymi węzłami. Znajdź współczynniki wielomianu

$$\sum_{k=0}^{n} x_k^4 \frac{\Pi_{\substack{j=0\\j\neq k}}^{n}(x - x_j)}{\Pi_{\substack{j=0\\j\neq k}}^{n}(x_k - x_j)}$$

w bazie potęgowej $(1, x, \ldots, x^n)$ dla $n = 10$.

Zadanie 8 Na odcinku $[0, 10]$ mamy węzły równo-odległe: $\{x_k\}_{k=0}^{N}$ z $x_k = k * h$ dla $h = \frac{10}{N}$. Dla danej funkcji $f(x) = \sin(4 * x)$ szukamy funkcję ciągłą $s \in C([a, b])$ taką, że na każdym pod-odcinku (x_k, x_{k+1}) ta funkcja s jest wielomianem stopnia co najwyżej dwa i spełnia warunki interpolacyjne:

$$\begin{aligned} s(x_k) &= f(x_k) \qquad k = 0, \ldots, N \\ s\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) &= f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) \qquad k = 0, \ldots, N - 1. \end{aligned}$$

(a) Czy taka funkcja jest wyznaczona jednoznacznie?

(b) Wyznacz możliwie małą stałą $C > 0$ niezależną od h taką, że

$$\|f - s\|_{\infty,[0,10]} \leq C\,h^3.$$

Zadanie 9 (trudne) Na odcinku $[a, b]$ mamy zadane węzły : $a = x_0 < \ldots < x_N = b$. Niech s splajn kubiczny na tym podziale odcinka (czyli funkcja w $C^2([a, b])$ na pod-odcinkach będąca wielomianem kubicznym) naturalny tzn. $s''(a) = s''(b) = 0$ i $f \in C^2([a, b])$ taka, że

$$f(x_k) = 0 \qquad k = 0, \ldots, N.$$

Pokaż, że

$$\int_a^b f^{(2)} s^{(2)}\,dx = 0.$$

Zadanie 10 Rozpatrzmy odcinek $[a, b] = [-2, 2]$ z węzłami $x_k = -2, -1, 0, 1, 2$ dla $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Czy istnieje splajn kubiczny naturalny s taki, że w węzłach przyjmuje wartości kolejno: $0, 2, 1, 2, 0$ i równocześnie s obcięte do odcinka $[x_2, x_3] = [0, 1]$ jest równe $1+x^2$. Splajn kubiczny jest naturalny gdy $s''(a) = s''(b) = 0$.

WSK: można policzyć współczynniki splajnu w jakiejś bazie wielomianów kubicznych na $[x_3, x_4] = [1, 2]$ i sprawdzić czy wtedy druga pochodna jest równa zero w $x_4 = b = 2$.

Na kartkówce nie będzie zadań oznaczonych jako trudne. Norma supremum to

$$\|f\|_{\infty,[a,b]} := \max_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

Być może dodam jakieś zadania z interpolacji czy splajnów ale ich na kartkówce już nie będzie.