Seria druga - LU, QR i LZNK

Zadanie 1 Rozpatrzmy macierz kwadratową wymiaru $(m+2)\times(m+2)$ dla $m \geq 2$ zapisaną w formie blokowej $A = \begin{pmatrix} C & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix}$, gdzie C dana nieosobliwa macierz $m \times m$, której czynniki rozkładu QR mamy dane (tzn znamy ortogonalną Q i górnotrójkątną R takie, że $C = QR$), B macierz $m \times 2$ maksymalnego rzędu.

(a) Zaproponuj algorytm rozwiązania układu równań liniowych $A\vec{x} = \vec{f}$ możliwie niskim kosztem przy założeniu, że A nieosobliwa.

(b) Oszacuj ten koszt w terminach $C_1 m^p + O(m^{p-1})$ dla $p = 1, 2, 3, \ldots$ i C_1 stałej.

(c) Czy przy powyższych założeniach A jest nieosobliwa? Jeśli nie to podaj możliwy do sprawdzenia możliwie tanio warunek na C i B, aby A była nieosobliwa.

Zadanie 2 (Układ z macierzą trójdiagonalną cykliczną) Rozpatrzmy układ równań liniowych $Ax = f$ z wektorem prawej strony $f = (f_1, \ldots, f_n)^T$ i A macierzą rzeczywistą $n \times n$, mającą elementy niezerowe tylko w rogach i na 3 głównych diagonalach tzn:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 & d_1 \\ b_1 & a_2 & c_2 & & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & b_{n-3} & a_{n-2} & c_{n-2} & 0 \\ & & & b_{n-2} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ d_2 & 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

silnie diagonalnie dominującą wierszowo. Opisz w pseudokodzie algorytm rozwiązywania tego układu będący odpowiednią wersją eliminacji Gaussa (rozkładu LU) bez wybory elementu głównego możliwie niskim koszcie względem n. Podaj ten koszt (jako $Cn^p + O(n^{p-1})$ dla stałej dodatniej C i p naturalnego).

Zadanie 3 Znajdź możliwe duże $c > 0$ i możliwie małe $C > 0$, że dla normy wektorowej w $\mathbb{R}^k$: $\|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} j^{-1}|x_j|^2}$ zachodzi

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^k \qquad c\|\vec{x}\|_2 \leq \|\vec{x}\| \leq C\|\vec{x}\|_2$$

Stałe c, C nazywamy stałymi równoważności między normą drugą a normą $\|\cdot\|$.

Zadanie 4 Dla wektora rzeczywistego $x = (x_i)_{i=1}^m$ definiujemy $|x| = (|x_i|)_{i=1}^m$. Dla norm p-tych zachodzi zawsze $\|x\|_p = \||x|\|_p$. Czy istnieje norma $\|\cdot\|$ w $\mathbb{R}^2$ dla której istnieje wektor x taki, że $\|x\| \neq \||x|\|$? Uzasadnij (w przypadku na tak podaj definicjęnormy).

Zadanie 5 Dla macierzy rzeczywistej $A = (a_{ij})_{i,j}$ $n \times n$ zdefiniujmy $|A| = (|a_{ij}|)_{ij}$.

(a) Czy dla normy Frobeniusa, maksimum i pierwszej zachodzi równość norm A i $|A|$? Wsk: Istnieją proste wzory na te normy zależne od współczynników macierzy.

(b) Pokaż np wprost z definicji normy indukowanej, że

$$\|A\|_2 \leq \||A|\|_2.$$

(c) (trudne) Podaj kontrprzykład, że odwrotna nierówność nie zawsze zachodzi. Wsk: Można skonstruować kontrprzykład $A = A^T$ 2×2 korzystając ze wzoru: $\|A\|_2 = \rho(A)$ - dla $A = A^T$. Tu $\rho(A)$ moduł największej co do modułu wartości własnej A.

Zadanie 6 Dla macierzy A wymiaru 10×10 z Zadania 2 dla $a_k = d_k = -b_k = -c_k = 1$ dla wszystkich odpowiednich k, oblicz indukowaną normę maksimum tzn. $\|A\|_\infty$ i wyznacz taki wektor x różny od zera, że $\|x\|_\infty \|A\|_\infty = \|Ax\|_\infty$. Czy wektor x jest wyznaczony jednoznacznie (z dokładnością do przemnożenia przez -1)?

Zadanie 7 Dla danych m różnych punktów (x_k, y_k) określamy krzywą $y - a * x^4 - bx^2 - c = 0$ (a, b, c parametry krzywej) jako najlepiej pasującą do tych punktów jeśli:

$$\sum_{k=1}^{m} |y_k - a * x_k^4 - bx_k^2 - c|^2 = \min_{\hat{a},\hat{b},\hat{c}} \sum_{k=1}^{m} |y_k - \hat{a} * x_k^4 - \hat{b} * x_k^2 - \hat{c}|^2$$

Sformułuj zadanie znalezienia parametrów takiej krzywej jako liniowe zadanie najmniejszych kwadratów (LZNK) dla danych m punktów. Określ jakie warunki muszą spełniać punkty aby to zadania miało jednoznaczne rozwiązanie dla $m \geq 0$. Wyznacz koszt rozwiązania tego LZNK zadania przy pomocy algorytmu Householdera względem m tzn jako $C_H m^p + O(m^{p-1})$ dla C_H stałej dodatniej i p wykładnika naturalnego.

Zadanie 8 Niech A macierz $n + 1 \times n$ kolumnami regularna trójdiagonalna tzn. wszystkie elementy takie, że $|i - j| > 1$ są równe zero. Jak rozwiązać LZNK z taką macierzą kosztem rzędu $C_1 n + C_2$ dla C_1, C_2 stałych dodatnich z użyciem rozkładu QR uzyskanym z wykorzystaniem macierzy Householdera.

Zadanie 9 Rozpatrzmy macierz A wymiaru $(n + 1) \times n$ taką że jesli zapisując blokowo mamy:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \vec{b}_1 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$$

dla A_1 macierzy $n \times (n - 1)$ i wektora $\vec{b} = \begin{pmatrix} \vec{b}_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ z b_2 różnym od zera i $\vec{b}_1$ wektorem wymiaru n. Znamy macierze: górnotrójkątną max rzędu R wymiaru $n \times (n - 1)$ i Q_1 ortogonalną wymiaru $n \times n$ że

$$A_1 = Q_1 R.$$

oraz potrafimy policzyć iloczyn $Q_1 x$ lub $Q_1^T x$ kosztem liniowym tzn. Cn dla pewnej stałej C. Czy macierz A jest kolumnami regularna? A jeśli tak to jak możliwie tanio znaleźć rozkład QR macierzy A z Q ortogonalną i R górnotrójkątną? Podaj koszt jako funkcję postaci $C_2 n^p + O(n^{p-1})$ dla najniższego możliwego p naturalnego i jakiejś stałej C_2. Można rozważyć dwa przypadki - pierwszy kiedy explicite wyliczamy Q a drugi gdy otrzymujemy Q jako iloczyn odpowiednio dobranych macierzy ortogonalnych.