Seria pierwsza - równania nieliniowe i fl

Oznaczenie : aew oznacza $a * 10^w$ dla a liczby rzeczywistej z zakresu $[0, 10]$ postaci $d.dddd$ gdzie d to cyfra $0, \ldots, 9$, a w wykladnik czyli liczba całkowita, np $1.234567e5$ oznacza 123456.7 a $0.1234e-3$ oznacza 0.0001234.

Zadania czy podpunkty oznaczone jako **trudne** nie będą na kartkówce. Część z nich jest trudna pozornie z braku narzędzi które pojawią się na wykładzie później.

Metoda generującej ciąg x_n zbieżny do x^* rozwiązania ma rząd zbieżnosci (wykładnik zbieżności) równy $p \geq 1$ jesli istnieje $C \geq 0$ i N takie, że jeśli $n \geq N$ to

$$|x_{n+1} - x^*| \leq C|x_n - x^*|^p \qquad p > 1$$

w przypadku $p = 1$ rządamy dodatkowo by $C < 1$ i wtedy mówimy o zbieżności liniowej. Przypadek $p = 2$ określamy jako zbieżność kwadratową a $p = 3$ kubiczną.

Zadanie 1 (trudne)

- Pokaż, że metoda iteracyjna $x_{k+1} = F(x_k)$ spełniająca $F \in C^p$ na otoczeniu x^*, $F(x^*) = x^*$ i $F^{(j)}(x^*) = 0; j = 1, \ldots, p-1$ $(p > 1)$jest zbieżna lokalnie i ma rząd zbieżności p.
- Określ rząd zbieżności metody Newtona korzystając z tego kryterium przy założeniu $f'(x^*) \neq 0$ i $f \in C^\infty$.
- Określ rząd zbieżności metody Newtona korzystając z tego kryterium przy założeniu $f'(x^*) \neq 0 = f''(x^*)$ i $f \in C^\infty$.
- Określ rząd zbieżności metody cięciw $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_0)$ korzystając z tego kryterium przy założeniu $f'(x^*) \neq 0$ i $f \in C^\infty$.
- Określ rząd zbieżności metody Halleya to metoda Newtona zastosowana do

  $$g(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{|f'(x)|}},$$

  korzystając z tego kryterium przy założeniu $f'(x^*) \neq 0$ i i $f \in C^\infty$.

Zadanie 2 Aby znaleźć pierwiastek trzeciego stopnia z 5 czyli $x^* = 5^{1/3}$, dla równania $f(x) = x^3 - 5 = 0$ z rozwiązaniem $x^* = 5^{1/3}$ zastosowano metodę Newtona.

- Pokaż, że dla dowolnego $x_0 > 0$ zachodzi $x_k \geq x^*$ dla $k > 0$.
- udowodnij, że dla dowolnego $x_0 > 0$ metoda zbiegnie do x^*.
- Policz granice $\frac{e_{n+1}}{e_n^2}$ (o ile istnieje) dla $e_n = x_n - x^*$.
- Weźmy $x_0 > x^*$ czy wtedy prawdziwe jest oszacowanie $e_{n+1} \leq Le_n$ dla $n \geq 0$ ze stałą $L < 1$?

Zadanie 3 (trudne) Do rozwiązania przybliżonego równań $f(x) = x * \sin(x - 3)$ i $g(x) = (x - 3)^2 \exp(x)$ których rozwiązaniem jest $x^* = 3$ zastosowano metodę Newtona. Czy w obu przypadkach metoda będzie zbieżna lokalnie (dla x_0 przybliżenia startowego dostatecznie bliskiego x^*)? Jeśli tak to określ wykładnik (rząd) zbieżności w obu przypadkach.

Zadanie 4 Pokaż, że równanie $x^* - 0.2 * \sin(x^*) = 6$ ma dokładnie jedno rozwiązanie i że następująca metoda iteracyjna $x_n = 0.2{*}\sin(x_{n-1}) + 6$ zbiegnie dla dowolnego $x_0 \in \mathbb{R}$ do rozwiązania tego równania. Oszacuj możliwie dobrze błąd $|x_9 - x^*|$ dla $x_0 = 6$.

Zadanie 5 Do rozwiązania zadania $f(x^*) = 0$ dla $f(x) = \exp(x) - a$ dla ustalonego $a \in (1, 4)$ zastosowano metodę iteracyjną, która w 9-tej iteracji zwróciła $x_9 > 0$ takie że mamy $|f(x_9)| = 1e - 7$. Czy na tej podstawie możemy stwierdzić, że $|x_9 - x^*| \leq 1e - 6$? Uzasadnić.

WSK: Skorzystać z tw. o wartości średniej i tego że $f(x^*) = 0$.

Zadanie 6 (trudne) Rozważamy funkcję

$$f(x) = \frac{1}{10}x^5 + \frac{1}{6}x^3 + x - 1.$$

(a) Pokaż, że f ma jedyne miejsce zerowe r w przedziale $(0, 1)$.

(b) Pokaż, że gdy do przybliżonego wyznaczenia r stosujemy metodę Newtona. dla dowolnego punktu startowego $x_0 \in (0, 1)$ otrzymamy ciąg przybliżeń x_n zbieżny do r.

(c) Pokaż, że zbieżność jest dokładnie kwadratowa.

Zadanie 7 Chcemy obliczyć funkcję $f(x) = \exp(10^7 x)$ w arytmetyce pojedynczej precyzji. Policz (przybliżony i względny) współczynnik uwarunkowania zadania dla $x \in [-10, 10]$ i określ czy obliczanie w tej arytmetyce fl wartości f dla $x = -6$ jest dobrze uwarunkowane ze względu na błąd względny?

Zadanie 8 Chcemy w fl obliczyć $f(x) = 2x - \sqrt{4x^2 + 7}$. Rozpatrzmy dwa algorytmy: w pierwszym liczymy:

$f := \sqrt{4x^2 + 7}; f := 2x - f;$

a w drugim:

$f := \sqrt{4x^2 + 7}; f := -7.0/(2x + f);$

Który z nich należy zastosować do obliczenia w arytmetyce fl pojedynczej precyzji $f(10^7)$? (Podać krótkie uzasadnienie - 1-2 zdania - nie trzeba formalnie dowodzić oszacowań)

Zadanie 9 (o ile nie było na wykładzie) Pokaż, że następujący naturalny algorytm obliczania: iloczynu skalarnego dwóch wektorów $x, y \in \mathbb{R}^M$ tzn. $x^T y = \sum_{k=1}^{M} x(k)y(k)$ jest numerycznie poprawny tzn. obliczamy

```
s=x(1)*y(1);
for  k=2:M,
  s=s+x(k)*y(k);
endfor
```

Zadanie 10 Pokaż, że następujący naturalny algorytm obliczania iloczynu macierz kwadratowej $A \in \mathbb{R}^{M,M}$ i wektora $x, \in \mathbb{R}^M$ tzn. $y = Ax$: jest numerycznie poprawny:

```
for    j=1:M,
  y(j)=0;
  for  k=1:M,
     y(j)=y(j)+A(j,k)*x(k);
  endfor
endfor
```

Wskazówka: $y(j)$ jest iloczynem skalarnym $j-$tego wiersza A z x.

Zadanie 11 (trudne) Pokaż, że następujący naturalny algorytm obliczania: cosinusa kąta dwóch wektorów $x, y \in \mathbb{R}^M$ tzn. $\cos(x, y) = \frac{x^T y}{\sqrt{x^T x}\sqrt{y^T y}}$ jest numerycznie poprawny:

(a) $a = \sqrt{\sum_{k=1}^M x_k^2}$, $b = \sqrt{\sum_{k=1}^M y_k^2}$

(b) $c = \sum_{k=1}^M x_k y_k$

(c) $w = c/(a * b)$

Rozwiązania zadań powinny być uzasadnione. Można powoływać się na wyniki z wykładu czy z ćwiczeń o ile zostały na tych ćwiczeniach udowodnione i wtedy jeśli to wyniki z ćwiczeń to należy je precyzyjnie sformułować.