Kolokwium z Równań Różniczkowych Zwyczajnych - 16 maja 2000

Zadanie 1 Dane jest zagadnienie początkowe:

$$y' = \sin(y) + y^3 + (y - x^2)^{2/3}, \quad y(x_0) = y_0.$$

Określić możliwie duży obszar
$\{(x_0, y_0) \in R^2 :$ zagadnienie ma jednoznacznelokalne rozwiązanie$\}$. Uzasadnić powołując się na twierdzenia z wykładu.

Zadanie 2 Dane jest równanie

$$x^{(4)} - 16 * x = \cos(3t) + \exp(-t) - t^2 + t + 7$$

(a) Znaleźć rozwiązanie ogólne.

(b) Czy istnieją rozwiązania ograniczone dla $t \to +\infty$?

(c) Czy istnieją rozwiązania okresowe?

(d) Czy istnieją rozwiązania zbiegające do $+\infty$ dla $t \to +\infty$?

W podpunktach (b),(c),(d) podać postać odpowiednich rozwiązań (o ile istnieją).

Zadanie 3 Rozważmy metodę:

$$\Big\{ y_{n+1} = y_n + h/2 \cdot (f(t_n, y_n) + \alpha\, f(t_n + h, y_{n+1}))$$

dla równania $\dot{y} = f(t, y), t \in (0, T)$ z warunkiem początkowym $y(0) = y_0$. Zbadać zbieżność metody w zależności od parametru $\alpha \in [0, 2]$ i podać oszacowanie błedu $|y_n - y(t_n)|$, gdzie y rozwiązanie równania, $t_n = h * n$.

Zadanie 4 Dla równania:

$$y' = \cos(x) * (\cos(y - 1) - 1)^2 + \sin(y - 1) + y^2 - 5y + 4; \;\; y(1) = s$$

policzyć pochodną rozwiązania wzgl. warunku początkowego dla $s = 1$ tzn $\frac{\partial y}{\partial s}_{|s=1}(x)$.

Szkic rozwiązań:

Zad 1. Z tw Picarda ten obszar zawiera $\{(x_0, y_0) : x_0^2 \neq y_0\}$. (Bo funkcja $f(s) = s^{2/3}$ nie jest Lipchitz na R (jest na $R \setminus (-\epsilon_1, \epsilon_2), \epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ dowolne).

Zad 2. Pierwiastki wielomianu charakterystycznego: $2, -2, 2i, -2i$ więc rozwiązanie równania jednorodnego $c_1 \exp(2t) + c_2 \exp(-2t) + c_3 \sin(2t) + c_4 \cos(2t)$. Można zgadnąć postać rozwiązania szczególnego: $a \exp(-t) + b \cos(3t) + c \sin(3t) + d_2 t^2 + d_1 t + d_0$, po podstawieniu i prostych rachunkach dostajemy że rozwiązanie równania ogólne:

$$x(t) = -\frac{1}{65}\cos(3t) - \frac{1}{15}\exp(-t) + \frac{1}{16}(t^2 - t - 7) + c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} + c_3 \sin(2t) + c_4 \cos(2t)$$

Z postaci rozwiązania widać że nie ma rozwiązań ograniczonych ani okresowych a dla $c_1 \geq 0$ mamy rozwiązanie zbiegające do $+\infty$ dla $t \to +\infty$.

Zad 3. Schemat jednokrokowy jest konsystentny tylko dla $\alpha = 1$ w innym przypadkach tw. z wykładu nic o zbieżności nie mówią. Dla $\alpha = 1$ jest to schemat trapezów o rzędzie 2 (np. powołać się na wykład albo ćwiczenia albo ewent. można było rząd policzyć) więc jest zbieżny (do tego sama konsystentność wystarczy) i dla dostatecznie gładkiego y (jak gładkiego?) mamy oszacowanie błedu (konsystentny i rząd 2): $|y(t_n) - y_n| \leq Ch^2$.

Zad 4. Widać że dla $s = 1$ mamy rozwiązanie $y(t) = 1$ dokonując zamiany zmiennych $z(x) = y(x) - s$ przechodzimy do równania $z' = f(x, z + s), z(1) = 0$ (f - prawa strona poprzedniego równania) czyli s z warunku początkowego stał się parametrem, z wykładu wiadomo że pochodna po parametrze spełnia

$$\frac{\partial y'}{\partial s} = \frac{\partial z'}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial y}(\frac{\partial y}{\partial s} - 1) + \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

i $\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial y}{\partial s} - 1 = 0$ (te rachunki były już na ćwiczeniach) więc w naszym przypadku mamy

$$\frac{\partial y'}{\partial s} = -2\frac{\partial y}{\partial s}, \ \ \frac{\partial y}{\partial s}(1) = 1$$

Podstawiliśmy $y = 1$. Zatem po rozwiązaniu prostego równania liniowego jednorodnego mamy $\frac{\partial y}{\partial s}_{|s=1}(x) = \exp(-2(x-1))$.