Kolokwium z Równań Różniczkowych Zwyczajnych - 20 maja 2000

Zadanie 1 (4pkt) Dane jest zagadnienie początkowe:

$$y' = |\sin(y)| + y^2 + x^{2/3}, \quad y(x_0) = y_0.$$

Określić obszar $\{(x_0, y_0) \in R^2 :$ zagadnienie powyższe ma jednoznaczne rozwiązanie$\}$. Czy rozwiązanie dla $y_0 > 0$ są dodatnie dla $x \geq x_0$? (Uzasadnić, powołując się ewentualnie na tw z wykładu).

Zadanie 2 (6pkt) Dane jest równanie

$$x^{(4)} + 9 * x^{(2)} = 0.5 * \cos(2t)$$

(a) Znaleźć rozwiązanie ogólne.

(b) Czy istnieją rozwiązania ograniczone dla $t \to +\infty$?

(c) Czy istnieją rozwiązania okresowe? (Jeśli tak to okreslić ich okres.)

(d) Czy istnieją rozwiązania zbiegające do $+\infty$ dla $t \to +\infty$?

W podpunktach (b),(c),(d) podać postać odpowiednich rozwiązań (o ile istnieją).

Zadanie 3 (3pkt) Dla równania:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 10x + y + x^2 - 10 \\ \dot{y} &= y + x^2 \end{aligned}$$

znaleźć pkty krytyczne leżące na paraboli $\{(x, y) : y + x^2 = 0\}$ i określić ich stabilność.

Zadanie 4 (7pkt) Rozważmy równanie:

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= -2x_1 + 12x_2 \\ \dot{x_2} &= x_1 + 2x_2 \end{aligned}$$

- Znaleźć rozwiązanie ogólne.
- Czy istnieją rozwiązanie o trajektoriach zawartych w prostych? Jeśli tak to wyznaczyć kierunki tych prostych.
- Naszkicować portret fazowy.
- Określić stabilność pktu krytycznego $(0, 0)^T$. (tzn czy pkt krytyczny stabilny i jeśli tak to czy stabilność jest asymptotyczna).

Suma - 20pkt.

Szkic odpowiedzi:

1. Z tw Picarda wystarczy ze w otoczeniu pkt (x_0, y_0) funkcja jest Lipschitzowska ze względu na x, wystarczy zbadać każdy człon osobno (suma f. Lip. jest Lip.) tylko pierwszy człon budzić może wątpliwości, pozostałe mają ciągłą pochodną $\frac{\partial f}{\partial y}$ więc z tw. o wartości średniej są L. ze względu na y. Ale mamy $|\,|\sin(y_1)| - |\sin(y_2)|\,| \leq |\sin(y_1) - \sin(y_2)| \leq |y_1 - y_2|$ - nierówność trójkąta i tw. o wartości średniej. Więc obszar z Zad 1 to całe R^2. Z kolei ponieważ $f(x,y) \geq 0$ więc $y'(x) = f(x,y) \geq 0$ zatem rozwiązanie jest niemalejące co oznacza że jeśli $y_0 = y(x_0) > 0$ to $y(x) > 0, x \geq x_0$.

2. Pierwiastki wielomianu charakterystycznego: $0, 0, 3i, -3i$ zatem rozwiązanie równania jednorodnego: $x_j(t) = c_0 + c_1 t + c_2 \cos(3t) + c_3 \sin(3t)$. Rozwiązanie szczególne ma postać $\alpha \cos(2t)$ więc rozwiązanie ogólne $x(t) = -\frac{1}{40}\cos(2t) + c_0 + c_1 t + c_2 \cos(3t) + c_3 \sin(3t)$. Z tego wzoru wynika że

   (b) istnieją rozwiązania ograniczone jeśli $c_1 = 0$

   (c) istnieją rozwiązania okresowe jeśli $c_1 = 0$ o okresie 2Π dla $c_2^2 + c_3^2 > 0$ lub Π jeśli $c_2 = c_3 = 0$.

   (d) istnieją rozwiązania zbieżne do $+\infty$ dla $t \to +\infty$ jeśli $c_1 > 0$ ponieważ $\lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{t\to+\infty} c_1 t$ dla $c_1 \neq 0$ a w.p.p ta granica nie istnieje i rozwiązanie jest ograniczone.

3. Oczywiście pktkrytyczny zresztą jedyny istniejący to: $x = 1, y = -1$. Wtedy

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} 10+2x & 1 \\ 2x & 1 \end{pmatrix} \quad Df(1,-1) = \begin{pmatrix} 12 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

   Zatem $Df(1,-1)$ ma wartość własną dodatnią czyli pkt krytyczny $(1,-1)$ niestabilny.

4. Ponieważ A nieosobliwa to jedyny pkt krytyczny to $(0,0)^T$ i jest on niestabilny (siodło). Wartości własne macierzy prawej strony

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 12 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   wynoszą $4, -4$, odpowiednie wektory własne to $\mathbf{x_1} = (2,1)^T$ dla 4 i $\mathbf{x_2} = (-6,1)^T$ dla -4. Zatem rozwiązanie uogólnione:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(t) = c_1 \exp(4t) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \exp(-4t) \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   dla c_1, c_2 dowolnych stałych rzeczywistych.

   Oczywiście dla któregoś z $c_i, i = 1,2$ równego zero trajektorie leżą odpowiednio na prostej $y = 0.5x$ jeśli $c_2 = 0$ na $y = -1/6x$ jeśli $c_1 = 0$, a w przypadku $c_1 = c_2 = 0$ rozwiązanie stałe więc trajektoria to pkt przecięcia prostych.

   Portret fazowy to siodło z osiami zadanymi przez proste $y = 1/2x$ i $y = -1/6x$, por. rysunek 1.

   Wszystkie te własności wprost wynikają z postaci rozwiązania uogólnionego.