Kolokwium z Równań Różniczkowych Zwyczajnych

28 marca 2002

1. Dane jest równanie
$$y' - 12\,\cos^2(x)\cdot y = -4\,\cos^2(x)\cdot y^{2/3}$$
   a) Znaleźć rozwiązanie ogólne.
   b) Znaleźć rozwiązania spełniające $y(0) = 0$.
   c) Czy istnieją rozwiązania klasy $C^1(R)$ spełniające $y(0) = 0$, nieujemne i nieograniczone dla $x \to +\infty$? Czy istnieją rozwiązania zbiegające do zera dla $x \to +\infty$? Jeśli tak, podać postać odpowiednich rozwiązań.

2. Dla równania:
$$x\cdot y' = (2x + y + 7)^3 - 2x$$
   a) Znaleźć wszystkie funkcje spelniające te równanie.
   b) Znaleźć rozwiaząnia spełniające $y(1) = 10$.
   c) Czy istnieją rozwiązania ograniczone na R?

3. Rozważmy tzw. ulepszoną metodę Eulera:
$$\begin{cases} K_1 := f(t_n, y_n); \qquad K_2 := f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_1); \\ y_{n+1} = y_n + h\cdot K_2 \end{cases}$$
   dla równania $\dot{y} = f(t, y)$ z warunkiem początkowym $y(0) = y_0$.
   a) Znaleźć rząd tej metody.
   b) Niech $f(t, y) = a\cdot y$, gdzie $a < 0$. Znaleźć warunek na długość kroku h, aby rozwiązanie przybliżone $\{y_n\}$ uzyskane ulepszoną metodą Eulera miało własność, że $y_n \to 0$, gdy $n \to \infty$.

4. Niech będą dane trzy liczby rzeczywiste a, b, c. Znaleźć równanie krzywej (krzywych?) $0 < x \mapsto y(x)$, o własności takiej, że w każdym punkcie x, styczna do tej krzywej przecina oś OY w punkcie $K = (0, k)$, spełniającym warunek
$$k = a + b\cdot x + c\cdot y(x).$$

Wskazówki do rozwiązań:

1. Równanie Bernouli: podstawienie $s(x) = y^{1/3}$ sprowadza do równania liniowego. Rozwiązanie uogólnione:
$$y(x) = \left(\frac{1}{3} + c\exp(\sin(2x) + 2x)\right)^3$$

Rozwiązanie spełniające $y(0) = 0$: gładkie

$$y = 0 \quad y(x) = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\exp(\sin(2x) + 2x)\right)^3$$

oraz sklejane klasy $C^2(R)$ np

$$y(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\exp(-\sin(2b) - 2b + \sin(2x) + 2x)\right)^3 & x \leq b \\ 0 & b \leq x \leq a \\ \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\exp(-\sin(2a) - 2a + \sin(2x) + 2x)\right)^3 & x \geq a \end{cases}$$

dla $b \leq 0 \leq a$ i $a \neq b$. Oczywiście sklejać możemy również jednym pkcie.

Nie istnieją rozwiązania nieograniczone i nieujemne spełniające $y(0) = 0$. (Wszystkie nieograniczone muszą być większe od $1/27$).

Do zera zbiegają wszystkie rozwiązania sklejane równe zero na pólosi $[a, +\infty)$ i $y = 0$.

2. Podstawienie $s(x) = 2x + y(x) + 7$ sprowadza to równanie do r. o zmiennych rozdzielonych: $xs' = s^3$. Nie należy pominąć rozwiązania $s = 0$!

3. Rząd dwa - trzeba rozwinąć schemat w szereg Taylora. Podpkt b) [proste rachunki].

4. $k = -y'x + y$ stąd otrzymujemy równanie:

$$xy' = (c-1) * y + bx + a$$

dla $c \neq 1, x \neq 0$ równanie liniowe, $c = 1$ równanie o zm .rozdzielonych.