Kolokwium z Równań Różniczkowych Zwyczajnych

8 kwietnia 2002

1. Dane jest równanie
$$y' + 12\ \cos(x) \cdot y = \cos(x) * \exp(\sin(x)) \cdot y^{2/3}$$
   a) Znaleźć rozwiązanie ogólne.
   b) Znaleźć rozwiązania spełniające $y(0) = 0$.
   c) Czy istnieją rozwiązania z pdpktu b) klasy $C^1(R)$ spełniające $y(0) = 0$, nieujemne i nieograniczone dla $x \to +\infty$? Czy istnieją rozwiązania pdpktu b) zbiegające do zera dla $x \to +\infty$? Jeśli tak, podać postać odpowiednich rozwiązań.

2. Dla równania:
$$x \cdot y' = (3x + y - 9)^3 - 3x$$
   a) Znaleźć wszystkie funkcje spelniające te równanie.
   b) Znaleźć rozwiaząnia spełniające $y(1) = -5$.
   c) Czy istnieją rozwiązania ograniczone (na swojej max dziedzinie określoności)?

3. Dla równania:
$$x * y' = x^2 * \exp(y/x) + y$$
   znaleźć rozwiązanie uogólnione i rozwiązanie spełniające $y(1) = -2$.

4. Znaleźć krzywą (krzywe? jeśli jest ich duzo to wyznaczyć wszystkie) $y = y(x)$ takie że styczna (dana wzorem $Y = aX + b$) do tej krzywej w pkt $(x, y(x))$ która przecina oś OY w pkcie $K = (0, k)$ ma następującą własność: tangens kąta pomiędzy dodatnią półosią OX a styczną podniesiony do szóstej potęgi równa się k.

Szkic rozwiązań

1. Równanie Bernoulli - postawienie $s(x) = y(x)^{1/3}$ sprowadza to równanie do równania liniowego. Rozwiązanie uogólnione:
$$y(x) = \left(\frac{1}{15}\exp(\sin(x)) + c\ \exp(-4\sin(x))\right)^3 \quad c \in R$$
   Rozwiązania z. początkowego $y(0) = 0$: gładkie
$$y(x) = 0, \quad y(x) = \left(\frac{1}{15}\exp(\sin(x)) - \frac{1}{15}\exp(-4\sin(x))\right)^3$$
   i sklejane klasy $C^2(R)$ (skąd to wiemy?) np.
$$y(x; a, b) = \begin{cases} y(x; a) & x \le a \\ 0 & a \le x \le b \\ y(x; b) & b \le x \end{cases}$$

dla $a \neq b$ i $-\infty \leq a \leq 0 \leq b \leq +\infty$,

$$y(x; x_0) = \left(\frac{1}{15} \exp(\sin(x)) - \frac{1}{15} \exp(5 \sin(x_0) - 4 \sin(x)) \right)^3$$

tzn spełniającego $y(x_0) = 0$. Ponieważ rozwiązania są okresowe więc sklejać możemy na wiele sposobów.

Wszystkie rozwiązania są ograniczone i istnieją takie które mają granice zero w $+\infty$ - sklejane równe zero na pólprostej $[a, +\infty)$ i $y = 0$.

2. Postawienie $s(x) = 3x + y(x) - 9$ sprowadza równanie do r. o zmiennych rozdzielonych: $s' = s^3/x, x \neq 0$. Nie należy pomijać rozwiązania szcz. $y(x) = 9 - 3x$.

3. Równanie jednorodne. Podstawienie: $x * s(x) = y(x)$ sprowadza to równanie do zm. rozdzielonych.

4. Tangens kąta to współczynnik $a = y'$ a $k = -y'x + y$ i mamy

$$(y')^6 = -y'x + y$$

a więc równanie Clairauta : $y = xy' + f(y')$, f zadana funkcja. Podstawienie $p(x) = y'(x)$ i zróżniczkowanie równania daje jako rozwiązanie rodzinę prostych $(y' = p = 0)$ w naszym przypadku $y(x) = cx + c^6, c \in R$ (co można zgadnąć) i co ciekawsze rozwiązanie (tzw osobliwe) $(x + f'(p) = 0)$: $y(x) = -5x^{6/5}$.