Kolokwium z Równań Różniczkowych Zwyczajnych - 23 marca 2000.

Zadanie 1 (8 pkt) Dane jest równanie w postaci różniczek

$$(x * y * \cos(x^2 * y) + y^2 * 0.5)dx + x * (y + 0.5 * x * \cos(x^2 * y))dy = 0$$

Znaleźć całkę pierwszą tego równania $F(x, y)$, tzn funkcje stałą na trajektoriach, spełniającą $F(1, 1) = 0$.

Zadanie 2 (6 pkt) Do zagadnienia Cauchy'ego

$$y' = -100 * y, \quad y(0) = 1$$

zastosowano otwarty schemat Eulera z krokiem h.

(a) Znaleźć rozwiązanie tego schematu $y_h = \{y_n\}_{n=0,1,\dots}$ (zależne od h).

(b) Obliczyć granice y_n dla $h = 0.1$ i $n \to +\infty$. Czy jest ona równa granicy $\lim_{x\to+\infty} y(x)$ dla y rozwiązania wyjściowego zagadnienia Cauche'ego? Podać warunki na h dla których obie granice są sobie równe.

Zadanie 3 (12 pkt) Krzywa γ jest wykresem funkcji $y = f(x)$, określonej dla $x > 0$. Pole dowolnego trójkata OAB, gdzie

O - początek układu współrzędnych,

A - punkt leżący na na krzywej γ,

B - punkt przecięcia stycznej do krzywej γ w punkcie A z osią Oy,

jest równe 1.
Wyznaczyć rozwiązanie tj. funkcje $y(x) = f(x)$ wiedząc, że:

(i) przechodzi ona przez punkt (1,2),

(ii) dla każdego punktu A punkt B należy do dodatniej półosi Oy.

Zadanie 4 (9 pkt) Dane jest równanie

$$y' = 10 * y + 20 * x * (y - 5)^{4/5} - 50$$

znaleźć:

(i) rozwiązanie ogólne,

(ii) rozwiązania spełniające warunek $y(1) = 5$, dodatnie tzn. $y > 0$ i klasy $C^3(\Re)$.

Zadanie 5 $(*)$ (5 pkt) Udowodnić, że rozwiaząnie zagadnienia początkowego

$$y' = y^2 + (\sin(y))^2, \quad y(0) = y_0$$

dla $y_0 > 0$ ma rozwiązanie wysycone (tzn. nie dające sie przedłużyć na dłuższy odcinek) określone na odcinku $(-\infty, a)$ dla jakiegoś $a > 0$. Oszacować z góry a. Czy istnieje oszacowanie niezależne od y_0?

Zadania 5 jest dodatkowe, jesli starczy Państwu czasu na poprzednie zadania moim zdaniem łatwiejsze.

W sumie 35 pktów + 5 pktów za Zad 5.