

Egzamin z Równań Różniczkowych Zwyczajnych - 30 maja 2000 wtorek.

Zadanie 1 (5 pkt) Dane jest równanie

$$y' - 6x * y = -12x * y^{2/3}$$

- (a) Znaleźć rozwiązanie ogólne.
- (b) Znaleźć rozwiązania spełniające $y(0) = 0$.
- (c) Czy istnieją rozwiązania klasy $C^1(\mathfrak{R})$ spełniające $y(0) = 0$, nieujemne i nieograniczone dla $x \rightarrow +\infty$?
- (d) Czy istnieją rozwiązania zbiegające do zera dla $x \rightarrow +\infty$?

W podpunktach (c),(d) podać postać odpowiednich rozwiązań (o ile istnieją).

Zadanie 2 (4 pkt) Na wózek o masie jednostkowej działa siła sprężyny o współczynniku $k > 0$ proporcjonalna od odchylenia od położenia $x = 0$ oraz siła oporu powietrza proporcjonalna do prędkości wózeczka v ze współczynnikiem 1.

- (a) Znaleźć równanie opisujące ruch wózeczka i rozwiązanie ogólne tzn funkcję opisującą jego położenie na osi OX .
- (b) Znaleźć rozwiązanie dla położenia początkowego $x = 0$ i prędkości $v = 1$ w chwili $t = 0$ przy $k = 2$.
- (c) Czy istnieje taka wartość parametru k , że położenie wózeczka spełnia $x(t) > 0, t > 0$ przy dowolnych $x(0)$ i $v(0)$.

Zadanie 3 (3 pkt) Dane jest równanie

$$\begin{aligned}x' &= -x + 1 \\y' &= 3x - z - 2 \\z' &= -x + y + 2z - 2\end{aligned}$$

- (a) Znaleźć rozwiązanie ogólne.
- (b) Znaleźć rozwiązanie spełniające $x(0) = 1, y(0) = -1, z(0) = 3$.
- (c) Znaleźć punkt krytyczny i zbadać jego stabilność.

Zadanie 4 (4 pkt) Schemat

$$x_{n+2} - x_n = 2hf(x_{n+1})$$

ma przybliżać równanie

$$\dot{x} = x.$$

- (a) Dla jakich $h \in \mathfrak{R}$ rozwiązania schematu (dla powyższego równania) $\{x_n\}_{n=0,1,\dots}$ spełniają $\limsup_n |x_n| < +\infty$?
- (b) Znaleźć rozwiązanie dla $h = 1$ spełniające $x_0 = 1, x_1 = 0$.
- (c) Zbadać rząd schematu.

Zadanie 5 (4 pkt) Dane jest zagadnienie początkowe

$$y' = \cos(x) * y + \sin(x) * y^2, \quad y(0) = \hat{y}$$

Znaleźć pochodną rozwiązania $y(x, \hat{y})$ względem warunku początkowego $\frac{\partial y(x, \hat{y})}{\partial \hat{y}}|_{\hat{y}=0}$.