Zadania z kolokwiów i egzaminu - Algebra, I inf

Semestr zimowy 2000/01

1 Kolokwium z algebry liniowej - 16 listopada 2000.

1.1 Zadania

Zadanie 1 Niech $\sigma = (4, 3, 2, 5, 1) \in \mathrm{Perm}(5)$ dana permutacja zbioru pięcio-elementowego.

(a)(3pkt) Znaleźć rozkład na rozłączne cykle.

(b)(3pkt) Znaleźć rozkład na transpozycje.

(c)(2pkt) Znaleźć liczbę $k \in \mathbf{N}, k > 0$ taką, że $\sigma^k = id$. (Przypomnienie: $\sigma^k = \sigma^{k-1} \circ \sigma, \sigma^1 = \sigma$).

(d)(5pkt) Czy dla dowolnej permutacji $p \in \mathrm{Perm}(n)$ dla dowolnej $n \in \mathbf{N}, n > 0$ istnieje $k \in \mathbf{N}, k > 0$ takie, jak w podpunkcie (c), tzn. takie, że $p^k = id$?

Zadanie 2 Niech $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5}) = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{5} : a, b, c \in \mathbf{Q}\} \subset \mathbf{R}$. Czy $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5})$ z odpowiednimi działaniami z ciała $\mathbf{R}$ jest:

(a)(3pkt) ciałem,

(b)(3pkt) przestrzenią liniową nad $\mathbf{Q}$,

(c)(3pkt) przestrzenią liniową nad $\mathbf{R}$,

(d)(3pkt) pierścieniem.

Zadanie 3 (7pkt) Dla danych macierzy zespolonych

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ -4 & 2 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}, \text{ i } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

stwierdzić czy są dobrze zdefiniowane następujące iloczyny macierzy i jeśli tak to je policzyć: AB, BA, $A^T B^T$, $B^T A^T$, CAB, $B^T A^T C^T$, CBA.

Zadanie 4 W ciele $\mathbf{C}$:

(a)(4pkt) policzyć $z = (2000 + 2000i)^{2000}$, tzn znaleźć $\mathrm{Re}\, z$ i $\mathrm{Im}\, z$.

(b)(4pkt) zaznaczyć na płaszczyźnie zespolonej (rysunek) zbiór

$$\mathcal{A} = \{z = x + yi \in \mathbf{C} : |z - 1| \leqslant |z - i|\}.$$

Czy prosta rzeczywista tj. zbiór $\{z \in \mathbf{C} : z = \overline{z}\}$ zawiera się w $\mathcal{A}$?

Wszystkie odpowiedzi na pytania **uzasadnić!**
Czas trwania kolokwium: 90 minut.
Suma punktów: 40. (Zaliczenie od 40 punktów: 50% sumy punktów z dwu kolokwiów, każde po 40 punktów).

1.2 Szkic rozwiazań

Zad 1 c) rozważamy ciąg permutacji: $(\sigma^k)_{k=1}^{n!+1}$. Ponieważ permutacji w $\mathrm{Perm}(n)$ jest $n!$ więc pewne dwa elementy są sobie równe, tzn. $\exists\, l < k \leqslant n! + 1$ t. że $\sigma^k = \sigma^l$ więc $\sigma^{k-l} = id$. Mamy $0 < k - l \leqslant n!$.

Tą własność ma każda grupa o skończonej liczbie elementów.

Można też łatwiej może nawet to pokazać korzystając z rozkładu na cykle: C cykl o długości k to $C^{l*k} = id$ dla $l \in \mathbf{Z}$. Niech permutacja $\sigma = C_1 \circ \ldots \circ C_m$, gdzie C_i rozłączne cykle o długości k_i to dla $k = k_1 * k_2 * \ldots * k_m$ mamy $C_1^k = (C_1^{k_1})^{k/k_1} = id^{k/k_1} = id$ i $\sigma^k = C_1^k \circ \ldots \circ C_m^k = id$.

Zad 2 $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5})$ jest przestrzenią nad $\mathbf{Q}$ i nie jest ciałem, pierścieniem ani p. liniową nad $\mathbf{R}$.

Zad 4 a) $z = (2000+2000i)^{2000} = 2000^{2000}(1+i)^{2000} == (\sqrt{2}*2000)^{2000}(\cos(\Pi/4)+\sin(\Pi/4))^{2000} = (\sqrt{2}*2000)^{2000}(\cos(500*\Pi) + i\sin(500*\Pi)) = (\sqrt{2}*2000)^{2000}$.

b) Półpłaszczyzna poniżej prostej $Rez = Imz$ (razem z prostą) - rachunki.

Reszta oczywista.

2 Zadania z drugiego kolkwium z algebry 9/01/2001

2.1 I grupa

Zadanie 1 Niech $A \in \mathbf{R}^{m,n}$ macierz. Udowodnić, że

$$\mathbf{R}^n = \operatorname{Ker} A \oplus \operatorname{R}(A^T).$$

Wsk: Dla $\underline{x} \neq 0$ mamy $\|\underline{x}\|_2^2 = \underline{x}^T \underline{x} > 0$.

Zadanie 2 Niech $(v_1, \ldots, v_n)$ baza w przestrzeni liniowej V nad $\mathbf{R}$. Niech $x = \sum_{i=1}^n a_i v_i, a_i \in \mathbf{R}$.

(a) Jakie warunki musza spełniać współczynniki a_i aby układ $(v_1, \ldots, v_{n-1}, x)$ był bazą V?

(b) Niech wektor $v = \sum_{i=1}^n c_i v_i, c_i \in \mathbf{R}$. Znaleźć współczynniki v w bazie z podpunktu (a) (przy założeniu że to baza).

Zadanie 3 Niech $f : \mathcal{P}_4(\mathbf{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbf{R})$ przekształcenie liniowe takie, że przy zadanych bazach: $(1, x, x^2/2, x^3/3, x^4/4)$ w $\mathcal{P}_4(\mathbf{R})$ i $(-x+1, x+1, x^2)$ w $\mathcal{P}_2(\mathbf{R})$ macierz tego przekształcenia wynosi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 12 \\ 0 & -1/2 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{3,5}.$$

(a) Znaleźć $f(1 + 3x + 4x^2 - 5x^4)$.

(b) Wyznaczyć bazy: $\operatorname{Ker} A$ i $\operatorname{R}(A)$.

(c) Wyznaczyć bazy: $\operatorname{Ker} f$ i $\operatorname{Im} f$.

Zadanie 4 Niech $A \in \mathbf{K}^{m,n}, m \leqslant n$ o maksymalnym rzędzie. Pokazac, że przekształcenie liniowe $\tilde{A} : (\mathbf{K}^n / \operatorname{Ker} A) \to \mathbf{K}^m$ zadane przez $\tilde{A}(W(\underline{x}, \operatorname{Ker} A)) = A\underline{x}$ jest dobrze zdefiniowanym izomorfizmem liniowym przestrzeni ilorazowej $(\mathbf{K}^n / \operatorname{Ker} A)$ na $\mathbf{K}^m$.

Dobrze zdefiniowany oznacza że wartość $\tilde{A}(W(\underline{x}, \operatorname{Ker} A))$ nie zależy do wyboru reprezentanta z warstwy.

2.2 II grupa

Zadanie 1 Niech $f : V \to W$ przekształcenie liniowe z przestrzeni liniowej V nad $\mathbf{K}$ ***na*** W, tzn $\operatorname{Im} f = W$. Pokazać, że przekształcenie liniowe $\tilde{f} : (V / \operatorname{Ker} f) \to W$ zadane przez $\tilde{f}([x]_{\operatorname{Ker} f}) = f(x)$ jest dobrze zdefiniowanym izomorfizmem liniowym przestrzeni ilorazowej $(V / \operatorname{Ker} f)$ na W. (Dobrze zdefiniowany oznacza że wartość $\tilde{f}([x]_{\operatorname{Ker} f})$ nie zależy do wyboru reprezentanta z klasy abstrakcji).

Zadanie 2 Dla macierzy $A \in \mathbf{R}^{m,n}$ pokazać, że

$$\mathbf{R}^m = \operatorname{Ker} A^T \oplus \operatorname{R}(A).$$

Wsk: Dla $\underline{x} \neq 0$ mamy $\|\underline{x}\|_2^2 = \underline{x}^T \underline{x} > 0$.

Zadanie 3 Niech $(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n)$ baza w $\mathbf{R}^n$ i $\underline{y} = \sum_{i=1}^n a_i \underline{x}_i, a_i \in \mathbf{R}$.

(a) Jakie warunki musza spełniać współczynniki a_i aby układ $(\underline{y}, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n)$ był bazą $\mathbf{R}^n$?

(b) Niech wektor $\underline{v} = \sum_{i=1}^n b_i \underline{x}_i, b_i \in \mathbf{R}$. Znaleźć współczynniki $\underline{v}$ w bazie z podpunktu (a) (przy założeniu, że to baza).

Zadanie 4 Niech $f : \mathcal{P}_1(\mathbf{R}) \to \mathcal{P}_4(\mathbf{R})$ przekształcenie liniowe takie, że przy zadanych bazach $(-x+1, 2x+2)$ w $\mathcal{P}_1(\mathbf{R})$ i $(1, x, x^2/2, x^3/3, x^4/4)$ w $\mathcal{P}_4(\mathbf{R})$ macierz tego przekształcenia wynosi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1/2 & -1/2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{5,2}.$$

(a) Znaleźć $f(-1 + 2x)$.

(b) Wyznaczyć bazy: $\operatorname{Ker} A$ i $\operatorname{R}(A)$.

(c) Wyznaczyć bazy: $\operatorname{Ker} f$ i $\operatorname{Im} f$.

Wszystkie odpowiedzi na pytania **uzasadnić!** Powołując się ewentualnie na wykład należy sformułować przytaczane twierdzenia.

Czas trwania kolokwium: 90 minut.

Suma punktów: 40.

2.3 Szkic rozwiązań

Zadania w obu grupach były albo przeformułowane albo bardzo podobne więc podam szkic rozwiązań zadań z grupy I.

Zad 1: Niezależność liniowa obu podprzestrzeni: Niech $\underline{x} \in KerA \cap R(A^T)$, wtedy $A\underline{x} = 0$ i istnieje $\underline{y} \in \mathbf{R}^m$ taki, że $A^T\underline{y} = \underline{x}$. Korzystając ze wskazówki

$$\|\underline{x}\|_2^2 = \underline{x}^T\underline{x} = (A^T\underline{y})^T\underline{x} = \underline{y}^T A\underline{x} = 0.$$

Stąd $\underline{x} = 0$. Dodatkowo mamy $dim(\text{Ker } A \oplus \text{R } (A^T)) = dim\text{Ker } A + dim\text{R } (A^T)$, $dim\text{R } (A^T) = rankA$ i $n = dim\text{Ker } A + rankA$ (wykład) stąd $dim(\text{Ker } A \oplus \text{R } (A^T)) = n$ i $\text{Ker } A \oplus \text{R } (A^T) = \mathbf{R}^n$.

Zad 2: $a_n \neq 0$, bo w.i.w. ten drugi układ niezależny liniowo. $x_n = a_n^{-1}y - \sum_{i=1}^{n-1} a_i\, a_n^{-1}v_i$. Podstawiając dostajemy

$$v = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i = c_n a_n^{-1} y - \sum_{i=1}^{n-1} c_n a_i\, a_n^{-1} v_i + \sum_{i=1}^{n-1} c_i v_i = \sum_{i=1}^{n-1} (c_i - c_n a_i\, a_n^{-1}) v_i + c_n a_n^{-1} y.$$

Zad 3: Łatwe.

Zad 4: Dobrze zdefiniowane przekształcenie: $\underline{w}, \underline{v} \in W(\underline{v}, KerA)$ to

$$\tilde{A}(W(\underline{v}, KerA)) = A\underline{v} = A(\underline{v} - \underline{w} + \underline{w}) = A\underline{w} = \tilde{A}(W(\underline{w}, KerA)).$$

bo $\underline{v} - \underline{w} \in KerA$.

A ma rząd m więc A jako przekształcenie liniowe przyporządkowujące $\underline{x}$ wektor $A\underline{x}$ jest **na**, stąd i $\tilde{A}$ **na**, bo dla $\underline{y}$ mamy że istnieje $\underline{x}$ taki że $\underline{y} = A\underline{x} = \tilde{A}(W(\underline{x}, KerA))$.

$\tilde{A}$ różnowartościowe, wystarczy pokazać że $Ker\tilde{A} = \{0\}$ (w $\mathbf{R}^n / KerA$, wykład). Mamy

$$0 = \tilde{A}(W(\underline{v}, KerA)) = A\underline{v}$$

stąd $v \in KerA$ więc $W(\underline{v}, KerA) = KerA$ a $KerA$ jest zerem w $\mathbf{R}^n / KerA$, koniec.

3 Egzamin z Algebry I termin - 19 stycznia 2001.

3.1 Zadania

Zadanie 1 Niech $\mathcal{U}_n \subset \mathbf{R}^{2n,2n}$ będzie zbiorem macierzy rzeczywistych $2n \times 2n$ zdefiniowanym jako:

$$\mathcal{U}_n = \left\{ \begin{pmatrix} I & B \\ 0 & I \end{pmatrix} : \text{ dla } B \in \mathbf{R}^{n,n} \right\}.$$

(a) Udowodnić, że $\mathcal{U}_n$ z mnożeniem macierzy jest grupą. Czy ta grupa jest przemienna dla wszystkich $n \in \mathbf{N}, n > 0$?

(b) Czy dla $n = 1$ grupa $\mathcal{U}_1$ jest izomorficzna z $(\mathbf{R}, +, 0)$? (Grupa addytywna w ciele liczb rzeczywistych).

Zadanie 2 V przestrzeń liniowa skończenie wymiarowa nad $\mathbf{C}$. Niech (f_1, f_2) układ dwu funkcjonałów liniowych z przestrzeni sprzężonej V^* i (x_1, x_2) układ w V spełniające:

$$f_k(x_l) = \begin{cases} 1 & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases} \quad k, l = 1, 2.$$

(a) Pokazać, że układ (f_1, f_2) jest niezależny liniowo w V^* i układ (x_1, x_2) jest niezależny liniowo w V.

(b) Czy dla przekształcenia liniowego $T : V \to V$ zdefiniowanego $T(v) = f_1(v)x_1 + f_2(v)x_2$ mamy

$$Im\, T = Lin\,(x_1, x_2) \text{ i } Ker\, T = Ker\, f_1 \cap Ker\, f_2?$$

(Można przyjąć, że teza podpunktu (a) zachodzi).

(c) Pokazać, że

$$V = (Ker\, f_1 \cap Ker\, f_2) \oplus Lin\,(x_1, x_2).$$

Zadanie 3 Mamy układ równań $A\underline{x} \stackrel{?}{=} \underline{b}$ dla zespolonych:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & i & 0 & -2 \\ 3 & -6 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^{4,5}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^4.$$

Określić czy układ jest sprzeczny, niesprzeczny, oznaczony. Znaleźć zbiór rozwiązań $\mathcal{L}(A, \underline{b})$. Określić rząd macierzy A i podać bazę $Ker\, A$.

Zadanie 4 Mamy macierz zapisaną blokowo

$$B_\alpha = \begin{pmatrix} A & A \\ A & \alpha A \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{2n,2n},\ n > 0$$

dla parametru $\alpha \in \mathbf{R}$ i $A \in \mathbf{R}^{n,n}$ nieosobliwej.

- Określić $Rank\, B_\alpha$ i wymiar $Ker\, B_\alpha$ w zależności od parametru $\alpha \in \mathbf{R}$.
- Dla jakich α macierz B_α jest nieosobliwa.
- Określić kiedy układ $B_\alpha \underline{x} \stackrel{?}{=} \underline{f}$ dla

$$\underline{f} = \begin{pmatrix} \underline{f}_1 \\ \underline{f}_1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{2n},\ \underline{f}_1 \in \mathbf{R}^n.$$

jest sprzeczny, niesprzeczny lub oznaczony i dla α w tym ostatnim przypadku znaleźć rozwiązanie używając danych A, A^{-1}, f_1, α. Czy ten układ ma rozwiązanie dla dowolnego wektora prawej strony $\underline{f}$ dla wszystkich α?

Wszystkie odpowiedzi na pytania **uzasadnić!** Powołując się na wykład należy sformułować przytaczane twierdzenia. (Brak sformułowania twierdzeń obniży ocenę!)

Suma punktów: 100=4 $\times$ 25.

3.2 Szkic rozwiązań

Zad 1 Mamy

$$\begin{pmatrix} I & B \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & A+B \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

więc łączność i przemienność działania oczywiste. Element neutralny to I_{2n} a odwrotny

$$\begin{pmatrix} I & B \\ 0 & I \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I & -B \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

Oczywiście dla $n = 1$ przekształcenie $f : \mathcal{U}_n \to \mathbf{R}$ zdefiniowane $f(\begin{pmatrix} I & b \\ 0 & I \end{pmatrix}) = b$ jest wzajemnie jednoznaczne i co więcej

$$f(\begin{pmatrix} I & b \\ 0 & I \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} I & a \\ 0 & I \end{pmatrix}) = a + b = f(\begin{pmatrix} I & b \\ 0 & I \end{pmatrix}) + f(\begin{pmatrix} I & a \\ 0 & I \end{pmatrix})$$

więc jet izomorfizmem tych grup.

Zad 2 (a) Załóżmy liniową zależność któregoś z układów tzn $x_1 = ax_2$ lub $f_1 = bf_2$ $a, b \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$, wtedy

$$1 = f_1(x_1) = f_1(ax_2) = af_1(x_2) = a0 = 0 \ \text{ i } \ 1 = f_1(x_1) = bf_2(x_1) = b0 = 0$$

sprzeczność w obu przypadkach.

(b) Oczywiście $Im\,T \subset Lin(x_1, x_2)$. Ale mamy dla $x = ax_1 + bx_2$ że $Tx = x$ stąd $Lin(x_1, x_2) \subset Im\,T$. Z kolei jeśli $x \in Ker\,T$ to $f_1(x)x_1 + f_2(x)x_2 = 0$ i z niezależności liniowej (x_1, x_2) $f_k(x) = 0, k = 1, 2$ i $x \in Ker\, f_1 \cap Ker\, f_2$ zawieranie w drugą stronę oczywiste.

(c) Niech $x \in Ker\, f_1 \cap Ker\, f_2 \cap Lin(x_1, x_2)$ wtedy $x = ax_1 + bx_2$ ale $0 = f_1(x) = a$ i $0 = f_2(x) = b$, stąd $x = 0$.

Z twierdzenia z wykładu mamy

$$dim\, Ker\, T = dim\, V - Rank\, T$$

i

$$dim\, Ker\, T \oplus Im\, T = dim\, Ker\, T + dim\, Im\, T = dim\, Ker\, T + Rank\, T$$

porownując wymiary mamy, że $dim\, V = dim\,(Ker\, T \oplus Im\, T) = dim\,((Ker\, f_1 \cap Ker\, f_2) \oplus Lin(x_1, x_2))$, (wykorzystaliśmy podpunkt (b)) i koniec. Można też zauważyć że każdy $v \in V$ jest sumą $v = v_1 + v_2$ gdzie

$$v_1 = v - T(v),\ v_2 = T(v)$$

i $v_1 \in Ker\, f_1 \cap Ker\, f_2$ - prosty rachunek.

Zad 3 Eliminacja Gaussa.

Zad 4 $\alpha = 1$ - macierz osobliwa o $Rank\, B_\alpha = n$, wpp nieosobliwa. Można to pokazać na kilka sposobów np. zbadać $Ker\, B_\alpha$

$$B_\alpha \begin{pmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

daje dwa układy równań n-wymiarowe:

$$A\underline{x}_1 + A\underline{x}_2 = 0$$
$$A\underline{x}_1 + \alpha\, A\underline{x}_2 = 0$$

Z pierwszego układu $\underline{x}_1 = -\underline{x}_2$ (A nieosobliwa!) i wtedy z drugiego mamy $(1-\alpha)A\underline{x}_1 = 0$. Jeśli $\alpha = 1$ to $(1-\alpha)A = 0$, ma rząd 0 i $\underline{x}_1$ dowolny wektor, wpp $(1-\alpha)A$ nieosobliwa i $\underline{x}_1 = \underline{x}_2 = 0$. Tak więc $rank\, B_1 = n$, $rank\, B_\alpha = 2n$ dla $\alpha \neq 1$.

Układ jest niesprzeczny dla wszystkich α bo zawsze mamy rozwiązanie szczególne

$$\underline{x}_1 = A^{-1}\underline{f}_1, \;\; \underline{x}_2 = 0$$

niezależne od parametru. Układ oznaczony tylko dla $\alpha \neq 1$, wtedy powyższe rozwiązanie jedyne.