Kolokwia RRzw z lab semestr letni 2003/04 - treści i szkice rozwiązań.

Spis treści

1 Kolokwium z RRzwLab 25/03/04.

1.1 Treść zadań

Zadanie 1 Dane jest równanie w postaci różniczek

$$(2 * x * y * \sin(x^2 * y) + y^2)dx + x * (2 * y + x * \sin(x^2 * y))dy = 0$$

Znaleźć całkę pierwszą tego równania $F(x, y)$, tzn funkcje stałą na trajektoriach, spełniającą $F(1, 1) = 0$.

Zadanie 2 Do zagadnienia Cauchy'ego

$$y' = -30 * y, \quad y(0) = 2$$

zastosowano otwarty schemat Eulera z krokiem h.

(a) Znaleźć rozwiązanie tego schematu $y_h = \{y_n\}_{n=0,1,\ldots}$ (zależne od h).

(b) Obliczyć granice y_n dla $h = 0.1$ i $n \to +\infty$. Czy jest ona równa granicy
$\lim_{x\to+\infty} y(x)$ dla y rozwiązania wyjściowego zag. Cauche'ego? Podać warunki na h dla których obie granice są sobie równe.

Zadanie 3 Znaleźć dla równania:

$$x\,y' = x^2 * (\sin(y/x))^2 + y$$

1. rozwiązanie ogólne,
2. rozwiązanie spełniające $y(1) = 7$.
   Podać max przedział określonosci tego rozwiązania.

Czy istnieja rozwiązania postaci $y = cx$ dla c stałej?

Zadanie 4 Dane jest równanie

$$y' = 10 * y + (5 * \cos(x) - 10 * \sin(x)) * y^{4/5}$$

znaleźć:

(i) rozwiązanie ogólne,

(ii) rozwiązania spełniające warunek $y(1) = 0$ i klasy $C^3(\Re)$. Czy sa wśród nich rozwiązania nieujemne ale nie równe tożsamościowo zero?

1.2 Szkic rozwiązań

Zad 1 - Jest to równanie postaci

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}N = \frac{\partial}{\partial y}M$$

zatem istnieje F takie, że $\nabla F = (M,N)^T$. Całkując po konturze dostajemy:

$$\tilde{F}(x,y) = x * y^2 - \cos(x^2 * y) + Const.$$

Szukana funkcja $F(x,y) = \tilde{F}(x,y) - \tilde{F}(1,1)$.

Zad 2 - Schemat Eulera:

$$y_{n+1} = y_n - 30 * h * y_n$$

zatem

$$y_n = (1 - 30 * h)^n * 2.$$

Stąd wynika że granicy nie ma dla $|1 - 30 * h| \geq 1$ a rozwiązanie $y(t) = 2 * \exp(-30 * t)$ ma granicę równą zero itd

Zad 3 Równanie jednorodne postawienie $x * z(x) = y(x)$ sprowadza te równanie do r. o zm. rozdzielonych:

$$z' = (\sin(z))^2,$$

którego rozwiązaniem ogólnym jest $z(x) = \text{arcctg}(C - x) + k\Pi$, gdzie k całkowite, istnieją też rozwiązania stałe: $z_k(x) = k * \pi$ które po powrotnej zamianie zmiennych przechodzą na proste. Podstawiając dostajemy rozwiązanie ogólne i dla $k = 2$ możemy wyliczyć rozwiązanie spełniające $y(1) = 7$: $y(x) = x * \text{arcctg}(1 - x + \text{ctg}(7)) + 2 * x * \Pi$. Oczywiście określone na całej prostej rzeczywistej. Zauważmy że wszystkie te rozwiązania spełniają równanie na całej prostej rzeczywistej, choć w pkcie $x = 0$ równanie się degeneruje i mamy też, że wszystkie rozwiązania przechodzą przez pkt $(0, 0)$ - brak jednoznaczności.

Istnieją rozwiązania postaci: $y_k(x) = \Pi * k * x$.

Zad 4 R. Bernoulliego. Po zamianie zmiennych $s(x) = y(x)^{1/5}$. Dostajemy równanie liniowe:

$$s' = 2s + (\cos(x) - 2 * \sin(x))$$

Rozwiązanie szczeg. otrzymane np zgadnięciem (albo poprzez metodę uzmienniania stałej) to $\sin(x)$ więc rozwiązanie ogólne:

$$y(x) = (\sin(x) + c * \exp(2x))^5$$

Dla $y(0) = 0$ mamy dwa rozwiązania gładkie:

$$y = 0 \ \text{ i } \ y(x) = (\sin(x) - \sin(1) * \exp(2x - 2))^5$$

i dużo sklejanych w szczególności

$$y(x) = \begin{cases} 0 & x \le 1.5\Pi \\ \left(\sin(x) + e^{2(x-1.5\Pi)}\right)^5 & x \ge 1.5\Pi \end{cases}$$

jest nieujemne klasy C^4 (są też inne nieujemne a nie tożsamościowo równe zero).

2 Kolokwium z RRzwLab 13/05/04 czw

Treść i szkic rozwiązań

2.1 Treść zadań

Zadanie 1 Dane jest zagadnienie początkowe

$$y' = (y + \cos(x + y^2)) * y^2 + x^2 * y, \quad y(0) = \lambda$$

Znaleźć rozwiązanie i pochodną rozwiązania $y(x, \lambda)$ względem warunku początkowego dla $\lambda = 0$ tzn $y(x, 0)$ i $\frac{\partial y}{\partial \lambda}_{|\lambda=0}$.

Zadanie 2 Dane jest równanie

$$x^{(3)} - 8 * x = 2 * \sin(t) + \cos(t) + \exp(t) + 1$$

(a) Znaleźć rozwiązanie ogólne.

(b) Czy istnieją rozwiązania ograniczone dla $t > 0$?

(c) Czy istnieją rozwiązania okresowe? (Jeśli tak to określić ich okres.)

(d) Czy istnieją rozwiązania zbiegające do $-\infty$ dla $t \to +\infty$?

W podpunktach (b),(c),(d) podać postać odpowiednich rozwiązań (o ile istnieją).

Zadanie 3 Dla równania:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x \\ \dot{y} &= -x - 2y + z \\ \dot{z} &= -3x + y - 2z \end{aligned}$$

- znaleźć rozwiązanie ogólne
- znaleźć rozwiązanie przechodzące przez pkt $(0, 4, 0)^T$ dla $t = 0$.
- Czy istnieją rozwiązania okresowe różne od zera?
- Czy istnieją rozwiązanie różne od zera zbiegające do zera dla $t \to +\infty$?

W przypadku odpowiedzi pozytywnej wyróżnić zbiory zawierające trajektorie wszystkich takich rozwiązań.

Zadanie 4 Mamy dwie funkcje $\exp(-t)$ i $\cos(t)$.

1. Wyznaczyć odcinki (a, b) gdzie stanowią one układ fundamentalny dla równania :
$$\ddot{x} + p(t)\,\dot{x} + q(t)x = 0$$
z $p, q : (a, b) \to R$ funkcjami ciągłymi.
2. Obliczyć p i q dla których te funkcje stanowią układ fundamentalny.
3. Wyznaczyć równanie liniowe jednorodne o stałych współczynnikach możliwie małego rzędu dla którego $\mathrm{Span}(\exp(-t), \cos(t))$ stanowi podprzestrzeń przestrzeni rozwiązań. Czy to równanie jest wyznaczone jednoznacznie?

Suma - 40 pkt - każde zadanie po 10 pktów.

2.2 Szkic rozwiązań

Zad 1 Rozwiązanie: $y \equiv 0$ (jednoznaczne z tw Picarda) zatem $w(x) = \frac{\partial y}{\partial \lambda}_{|\lambda=0}$ spełnia:
$$w' = D_y f(t, y(t))w, \quad w(0) = 1.$$
U nas ($y \equiv 0$) $w' = x^2 w$ czyli $w(t) = \exp(\frac{x^3}{3})$. Koniec.

Zad 2 Wielomian charakterysrtyczny: $\rho(s) = s^3 - 8 = (s - 2)(s^2 + 2s + 4)$ ma pierwiastek 2 i parę sprzeżoną:$-1 + \sqrt{3}i$ i $-1 - \sqrt{3}i$. (Liczymy deltę...). Zatem rozwiązanie:
$$x(t) = x_s(t) + c_1 \exp(t) + \exp(-t) * (c_2 \sin(\sqrt{3}t) + c_3 \cos(\sqrt{3}t))$$

gdzie x_s rozwiązanie szczególne które obliczamy metodą współczynników nieoznaczonych (bo prawa strona ma odpowiednią postać).

$$x_s(t) = a\exp(t) + b + c\sin(t) + d\cos(t)$$

dla a, b, c, d stałych. Po podstawieniu i rozwiązaniu 2 równań liniowych i 1 układu równań liniowych znajdujemy te stałe i mamy rozwiązanie.

Rozwiązań ograniczonych więc i w szczeg. okresowych nie ma (bo w rozwiązaniu szczególnym mamy $-(1/7)\exp(t)$. Dla $c_1 < 0$ mamy że granica dla t dążącego do $+\infty$ jest $-\infty$ - co wynika z postaci rozwiązania.

Zad 3 Wielomian charakterystyczny: $(s-1)*((s+2)^2-1)$ zatem mamy trzy różne pierwiastki:$1, -1, -3$. Obliczamy odp wektory własne $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ tworzące kolumny macierzy C i rozwiązanie ogólne: $\vec{x}(t) = c_1\exp(t)\vec{v}_1 + c_2\exp(-t)\vec{v}_2 + c_3\exp(-3t)\vec{v}_3$. Nie ma rozw. okresowych, warunek początkowy daje równania na c_i. Rozwiązania dla których $c_1 = 0$ zbiegają w normie do zera dla $t \to +\infty$.

Zad 4 Funkcje tworzą układ fundamentalny na tych odcinkach na których wyznacznik macierzy:

$$\begin{pmatrix} \exp(-t) & \cos(t) \\ -\exp(-t) & -\sin(t) \end{pmatrix}$$

jest różny od zera tj. $(k\Pi/4, k(3/4)\Pi), k \in Z$. Podstawiając obie funkcje do równania dostajemy:

$$\begin{gathered} \exp(-t) - p(t)\exp(-t) + q(t)\exp(-t) = 0 \\ -\cos(t) - p(t)\sin(t) + q(t)\cos(t) = 0 \end{gathered}$$

i obliczamy $p(t), q(t)$.

Aby $\exp(-t), \cos(t)$ były rozwiązaniami jednorodnego równania liniowego o stałych współ. musimy mieć, że $-1, i$ są pierwiastkami wiel. charakterystycznego tego równania ale jak i to i $\bar{i} = -i$ musi być pierwiastkiem stąd ten wielomian:

$$(s+1)(s^2+1) = s^3 + s^2 + s + 1.$$

I nasze równanie wyznaczone z dokładnością do mnożenia przez niezerową stałą:

$$x^{(3)} + x^{(2)} + x^{(1)} + x = 0.$$

3 Kolokwium z RRzwLab popr (zakres: kol 1)

20/05/2004 czw

3.1 Treść zadań

Zadanie 1 Znaleźć rozwiązanie ogólne równania:

$$y' = \frac{1}{2 + \cos(x + y)} - 1.$$

Zadanie 2 Znaleźć dla równania:

$$y' = \frac{y^2 + x^2 + y * x}{x^2}, \quad x \neq 0$$

1. rozwiązanie ogólne,
2. rozwiązanie spełniające $y(1) = 1$.
   Podać max przedział określoności tego rozwiązania.

Zadanie 3 Dane jest równanie

$$y' = y + 4 * \cos(x) * y^5$$

znaleźć:

(i) rozwiązanie ogólne,

(ii) rozwiązania spełniające warunek $y(0) = -1$. Określić maksymalnie duży przedział określoności tego rozwiązania.

Zadanie 4 Mamy zagadnienie początkowe

$$y' = ay + f(x), \quad y(0) = \lambda,$$

gdzie $a < 0$ stałe a $f \in C(R)$ t. że $|f(x)| \leq 1$.

Znaleźć możliwie małe $c > 0$ takie że dla $|\lambda| \leq c$ mamy następujące oszacowanie $|y(x)| \leq 1$ dla dowolnego $x \geq 0$. (Czy istnieje dla każdego $a < 0$?)

Czas 1,5 godziny.

3.2 Szkic rozwiązań

Zad 1 Podstawienie $s(x) = y(x) + x$ sprowadza to równanie do r. o zmiennych rozdzielonych.

Zad 2 Równanie jednorodne: podstawienie $s(x) = y(x)/x$ sprowadza równanie do r. o zmiennych rozdzielonych.

Zad 3 Równanie Bernoulliego. Podstawienie $s(x) = (y(x))^{-4}$ z $s' = -4 * y^{-5} * y'$ sprowadza je do r. liniowego czyli s spełnia: $s' = -4s - 16\cos(x)$. Rozwiązanie r. jednorodnego: $c\exp(-4x)$, istnieje rozw. szczególne postaci: $a\cos(x) + b\sin(x)$ - podstawiamy znajdujemy stałe a, b itd (lub stosujemy met. uzmienniania zmiennych) Czyli rozw. ogólne $y(x) = +/-\ (c\exp(-4x) + a\cos(x) + b\sin(x))^{-1/4}$. Rozw spełniające $y(0) = -1$ wyznaczamy obliczając c (a, b znane!). I oczywiście max przedział określoności to odcinek $(-\infty, \beta)$ gdzie β najmniejsze dodatnie miejsce zerowe funkcji $c\exp(-4x) + a\cos(x) + b\sin(x)$ którego nie da się wyznaczyć analitycznie.

Zad 4 Rozwiązanie tego zagadnienia:

$$y(x) = \lambda\exp(ax) + \exp(ax)\int_0^x f(s)\exp(-as)\,ds$$

zatem

$$\begin{aligned}
|y(x)| &\le |\lambda|\exp(ax) + \exp(ax)\int_0^x |f(s)|\exp(-as)\,ds \\
&= |\lambda|\exp(ax) + \exp(ax)\int_0^x \exp(-as)\,ds \\
&= |\lambda|\exp(ax) + \frac{1}{-a}\exp(-as)|_0^x\exp(ax) \\
&= (|\lambda| - \frac{1}{|a|})\exp(ax) + \frac{1}{|a|} \quad (a < 0) \\
&\le \max(|\lambda|, \frac{1}{|a|}).
\end{aligned}$$

Przy czym gdyby np $f \equiv 1, \lambda > 0$ to mamy równość. Zatem gdy $0 > a > -1$ to nie da się zagwarantować aby $|y(t)| \le 1, t \ge 0$ wpp $|\lambda| \le 1$.