Rachunek sekwentów

Sekwenty są postaci $\Gamma \longrightarrow \Delta$, gdzie Γ, Δ to skończone ciągi formuł. Intuicyjny sens sekwentu $\Gamma \longrightarrow \Delta$ to “koniunkcja wszystkich formuł z Γ pociąga za sobą alternatywę wszystkich formuł z Δ.

Aksjomat

$$\frac{}{\varphi \longrightarrow \varphi}\ \text{(aksjomat)}$$

Reguły strukturalne

$$\frac{\Gamma_1, \varphi, \psi, \Gamma_2 \longrightarrow \Delta}{\Gamma_1, \psi, \varphi, \Gamma_2 \longrightarrow \Delta}\ \text{(wymiana:L)} \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta_1, \varphi, \psi, \Delta_2}{\Gamma \longrightarrow \Delta_1, \psi, \varphi, \Delta_2}\ \text{(wymiana:R)}$$

$$\frac{\Gamma, \varphi, \varphi \longrightarrow \Delta}{\Gamma, \varphi \longrightarrow \Delta}\ \text{(ściąganie:L)} \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta, \varphi, \varphi}{\Gamma \longrightarrow \Delta, \varphi}\ \text{(ściąganie:R)}$$

$$\frac{\Gamma \longrightarrow \Delta}{\Gamma, \varphi \longrightarrow \Delta}\ \text{(osłabianie:L)} \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta}{\Gamma \longrightarrow \Delta, \varphi}\ \text{(osłabianie:R)}$$

Reguły wprowadzania spójników

$$\frac{\Gamma, \varphi, \psi \longrightarrow \Delta}{\Gamma, \varphi \wedge \psi \longrightarrow \Delta}\ (\wedge\text{:L}) \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta, \varphi \qquad \Gamma \longrightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \longrightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi}\ (\wedge\text{:R})$$

$$\frac{\Gamma, \varphi \longrightarrow \Delta \qquad \Gamma, \psi \longrightarrow \Delta}{\Gamma, \varphi \vee \psi \longrightarrow \Delta}\ (\vee\text{:L}) \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Gamma \longrightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}\ (\vee\text{:R})$$

$$\frac{\Gamma \longrightarrow \Delta, \varphi}{\Gamma, \neg\varphi \longrightarrow \Delta}\ (\neg\text{:L}) \qquad \frac{\Gamma, \varphi \longrightarrow \Delta}{\Gamma \longrightarrow \Delta, \neg\varphi}\ (\neg\text{:R})$$

$$\frac{\Gamma \longrightarrow \Delta, \varphi \qquad \Gamma, \psi \longrightarrow \Delta}{\Gamma, \varphi \Rightarrow \psi \longrightarrow \Delta}\ (\Rightarrow\text{:L}) \qquad \frac{\Gamma, \varphi \longrightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \longrightarrow \Delta, \varphi \Rightarrow \psi}\ (\Rightarrow\text{:R})$$

Reguła cięcia

$$\frac{\Gamma, \varphi \longrightarrow \Delta \qquad \Gamma \longrightarrow \Delta, \varphi}{\Gamma \longrightarrow \Delta}\ \text{(cięcie)}$$

Reguły wprowadzania kwantyfikatorów

$$\frac{\Gamma, \varphi(t/x) \;\longrightarrow \Delta}{\Gamma, \forall x\, \varphi \;\longrightarrow \Delta}\ (\forall{:}\mathrm{L}) \qquad\qquad \frac{\Gamma \;\longrightarrow \Delta, \varphi(y/x)}{\Gamma \;\longrightarrow \Delta, \forall x\, \varphi}\ (\forall{:}\mathrm{R})$$

$$\frac{\Gamma, \varphi(y/x) \;\longrightarrow \Delta}{\Gamma, \exists x\, \varphi \;\longrightarrow \Delta}\ (\exists{:}\mathrm{L}) \qquad\qquad \frac{\Gamma \;\longrightarrow \Delta, \varphi(t/x)}{\Gamma \;\longrightarrow \Delta, \exists x\, \varphi}\ (\forall{:}\mathrm{L})$$

(warunek: w regułach (∀:R) i (∃:L) zmienna y nie występuje w $\Gamma \cup \Delta \cup \{\varphi\}$)

Aksjomaty równości (w logice pierwszego rzędu z =)

$$\frac{}{\longrightarrow t = t}\ (\mathrm{AE1})$$

$$\frac{}{t = s \;\longrightarrow s = t}\ (\mathrm{AE2})$$

$$\frac{}{t = s, s = u \;\longrightarrow t = u}\ (\mathrm{AE3})$$

$$\frac{}{t_1 = s_1, \ldots t_n = s_n, R(\bar{t}) \;\longrightarrow R(\bar{s})}\ (\mathrm{AE4})$$

$$\frac{}{t_1 = s_1, \ldots t_n = s_n \;\longrightarrow f(\bar{t}) = f(\bar{s})}\ (\mathrm{AE5})$$