Zadania domowe z matematyki odwrotnej na 13 III 2015

1. Rozważmy sytuację z dowodu zupełności dla zagnieżdżonych przedziałów z ostatniego wykładu: mamy ciągi $\langle x_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}, \langle y_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ liczb rzeczywistych, gdzie $x_n = \langle q_{nk} \rangle_{k\in\mathbb{N}}$, $y_n = \langle r_{nk} \rangle_{k\in\mathbb{N}}$. Rozumując w RCA_0, zdefiniowaliśmy funkcję f w taki sposób, że $f(k)$ to najmniejsze $n \geqslant k+2$ t. że $|q_{nn} - r_{nn}| \leqslant 2^{-k-2}$, a następnie zdefiniowaliśmy x jako $\langle q_{f(k)f(k)} \rangle_{k\in\mathbb{N}}$.

Pokazaliśmy już, że x jest liczbą rzeczywistą. Pokaż, że RCA_0 dowodzi ponadto, iż $x = \lim_n y_n$.

2. Pokaż, że RCA_0 dowodzi następującego twierdzenia. Niech $X \subseteq \mathbb{Q}$ spełnia $X \neq \emptyset$, $\mathbb{Q} \setminus X \neq \emptyset$, a ponadto $\forall q, r \in \mathbb{Q}\, (q \in X \wedge r < q \Rightarrow r \in X)$. Wtedy istnieje taka liczba rzeczywista x, że wszystkie liczby wymierne mniejsze (ostro) od x są w X, a wszystkie liczby wymierne większe (ostro) od x są poza X.