Zadania na 22 III 2013

8. Rozważmy sygnaturę logiki pierwszego rzędu zawierającą tylko jedną relację dwuargumentową R. Niech φ będzie koniunkcją zdań postaci $\forall\bar{x}\exists\bar{y}\eta(\bar{x},\bar{y})$, gdzie η jest alternatywą atomów i negacji atomów. (Przykładowo, φ mogłoby być aksjomatem porządku liniowego bez najmniejszego elementu albo gęstego liniowego porządku; można też np. skonstruować φ, które mówi coś w stylu "R jest iniekcją z uniwersum w uniwersum pozbawione pewnego elementu").

Niech φ_n będzie formułą rachunku zdań powstającą z φ w następujący sposób: każdy kwantyfikator $\forall x/\exists x$ zastępujemy koniunkcją bądź alternatywą po x-ach od 1 do n, w zależności od rodzaju kwantyfikatora, a potem atomy postaci $R(i,j)$ zamieniamy na zmienne zdaniowe p_{ij}. (Dla przykładu: jeśli φ to $\exists x \neg R(x,x)$, to φ_3 to $\neg p_{11} \vee \neg p_{22} \vee \neg p_{33}$. Jeśli φ to aksjomat liniowego porządku bez najmniejszego elementu, to φ_n to plus minus $\neg OP_n$.)

Łatwo spostrzec, że φ_n jest CNF-em i że jest niespełnialne dokładnie wtedy, gdy φ nie ma modelu mocy n. Udowodnij, że jeśli φ ma model nieskończony, to obalenie φ_n w rezolucji drzewiastej wymaga wykładniczej liczby kroków.

9. Dana jest formuła rachunku zdań $\bigwedge_{i\in I}\bigvee_{j\in J_i}\psi_{ij}$, gdzie każde ψ_{ij} jest głębokości co najwyżej d. Udowodnij, że rozmiar najmniejszego dowodu negacji (deMorganowskiej) tej formuły w systemie głębokości $d+2$ jest z dokładnością do wielomianu taki sam, jak rozmiar najmniejszego obalenia w systemie głębokości $d+2$ zbioru cedentów, w którym dla każdego $i \in I$ jest cedent $\{\psi_{ij} : j \in J_i\}$.