Parę zadań z dedukcji naturalnej

Aksjomat

$$\Gamma, \varphi \vdash \varphi$$

Reguły dla implikacji

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \to \psi}\ (\to\text{-I}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \to \psi \qquad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi}\ (\to\text{-E})$$

Reguły dla koniunkcji

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \land \psi}\ (\land\text{-I}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \land \psi}{\Gamma \vdash \varphi}\ (\land\text{-E L}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \land \psi}{\Gamma \vdash \psi}\ (\land\text{-E R})$$

Reguły dla alternatywy

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi \lor \psi}\ (\lor\text{-I L}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \lor \psi}\ (\lor\text{-I R})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \lor \psi \qquad \Gamma, \varphi \vdash \eta \qquad \Gamma, \psi \vdash \eta}{\Gamma \vdash \eta}\ (\lor\text{-E})$$

Reguły dla negacji

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\varphi}\ (\neg\text{-I}) \qquad \frac{\Gamma, \neg\varphi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \varphi}\ (\neg\text{-E})$$

($\Gamma \vdash \bot$ to skrót notacyjny dla: “$\Gamma \vdash \psi$, $\Gamma \vdash \neg\psi$”.)

Przykład 1

$$\dfrac{\dfrac{\neg\neg\varphi, \neg\varphi \vdash \neg\varphi \qquad \neg\neg\varphi, \neg\varphi \vdash \neg\neg\varphi}{\neg\neg\varphi \vdash \varphi}\,(\neg\text{-E})}{\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi}\,(\to\text{-I})$$

Przykład 2

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \wedge \psi \to \eta, \varphi, \psi \vdash \varphi \wedge \psi \to \eta \qquad \dfrac{\varphi \wedge \psi \to \eta, \varphi, \psi \vdash \varphi \qquad \varphi \wedge \psi \to \eta, \varphi, \psi \vdash \psi}{\varphi \wedge \psi \to \eta, \varphi, \psi \vdash \varphi \wedge \psi}\,(\wedge\text{-I})}{\varphi \wedge \psi \to \eta, \varphi, \psi \vdash \eta}\,(\to\text{-E})}{\varphi \wedge \psi \to \eta, \varphi \vdash \psi \to \eta}\,(\to\text{-I})}{\varphi \wedge \psi \to \eta \vdash \varphi \to (\psi \to \eta)}\,(\to\text{-I})$$

Przykład 3

$$\dfrac{\dfrac{\neg(\varphi \vee \neg\varphi), \varphi \vdash \varphi}{\neg(\varphi \vee \neg\varphi), \varphi \vdash \varphi \vee \neg\varphi}\,(\vee\text{-I L}) \qquad \neg(\varphi \vee \neg\varphi), \varphi \vdash \neg(\varphi \vee \neg\varphi)}{\neg(\varphi \vee \neg\varphi) \vdash \neg\varphi}\,(\neg\text{-I})$$

$$\dfrac{\dfrac{\neg(\varphi \vee \neg\varphi), \neg\varphi \vdash \neg\varphi}{\neg(\varphi \vee \neg\varphi), \neg\varphi \vdash \varphi \vee \neg\varphi}\,(\vee\text{-I R}) \qquad \neg(\varphi \vee \neg\varphi), \neg\varphi \vdash \neg(\varphi \vee \neg\varphi)}{\neg(\varphi \vee \neg\varphi) \vdash \neg\neg\varphi}\,(\neg\text{-I})$$

Łącząc dwa dowody z Przykładu 3 za pomocą reguły $\neg$-E, dostajemy dowód prawa wyłączonego środka: $\vdash \varphi \vee \neg\varphi$.

Zadania

1. $\varphi \to \neg\varphi \vdash \varphi$,
2. $\varphi \vdash \neg\varphi \to \psi$,
3. $\vdash \varphi \to \neg(\neg\varphi \wedge \psi)$,
4. $\varphi \to (\psi \to \eta) \vdash \psi \to (\varphi \to \eta)$,
5. $\vdash (\neg\varphi \wedge \neg\psi) \to \neg(\varphi \vee \psi)$,
6. $\neg(\varphi \wedge \psi) \vdash \neg\varphi \vee \neg\psi$,
7. $\vdash \neg((\varphi \to \neg\varphi) \wedge (\neg\varphi \to \varphi))$.