Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Logika Matematyczna
na podstawie notatek z wykładu 2014/15

Wykładowca:
Leszek Kołodziejczyk

Notatki spisał:
Grzegorz Bokota
Poprawki:
Magda Bojarska, Piotr Oszer, Piotr Zakrzewski, Wiktor Zuba, L.K.
Pożyczał notatki:
Wiktor Gromniak

26 lutego 2023

Spis treści

lak@mimuw.edu.pl

pok. 5180

www.mimuw.edu.pl/~lak

1. Logika zdań

1.1. Składnia

Ustalmy pewien zbiór Var jako zbiór *zmiennych zdaniowych.*

Notacja. Zwykle zmienne są oznaczane jako $p, q, r, \ldots$ albo p_1, p_2, p_3, ale nie ma wymogu, by zbiór Var był przeliczalny.

Definicja 1.1.1. Zbiór Form *formuł logiki zdań* nad zbiorem zmiennych Var (oznaczamy Form), to najmniejszy zbiór Z spełniający warunki:

1. $\mathrm{Var} \subseteq Z$,
2. Dla każdego $\varphi \in Z$ zachodzi $\neg\varphi \in Z$,
3. Dla dowolnych $\varphi, \psi \in Z$, $(\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \Rightarrow \psi), (\varphi \Leftrightarrow \psi) \in Z$.

Uwaga. Oficjalnie traktujemy formuły jako skończone ciągi symboli, tj. elementów zbioru $\mathrm{Var} \sqcup \{\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$. Przykładowo, $\neg\varphi$ to ciąg, w którym początkowy symbol to $\neg$, a następnie $(i+1)$-szy symbol jest tożsamy z i-tym symbolem w φ.

Uwaga. Zwykle stosujemy konwencje notacyjne:
- wyrzucamy zewnętrzne nawiasy, pisząc np. $p \wedge q$ zamiast $(p \wedge q)$.
- kolejność spójników: $\neg$ wiąże mocniej niż $\wedge, \vee$, a one mocniej niż $\Rightarrow, \Leftrightarrow$
- pomijamy nawiasy w ciągach koniunkcji i ciągach alternatyw, pisząc np. $p \wedge q \wedge r \wedge s$ zamiast $(((p \wedge q) \wedge r) \wedge s)$

Stwierdzenie 1.1.2 (indukcja po budowie formuły)**.** *Niech zbiór $W \subseteq \mathrm{Form}$ spełnia:* $\mathrm{Var} \subseteq W$*;* $\neg\varphi \in W$ *dla* $\varphi \in W$*;* $(\varphi \circ \psi) \in W$ *dla* $\varphi, \psi \in W$ *oraz* $\circ \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$*. Wtedy* $W = \mathrm{Form}$.

Dowód. Wprost z definicji zbioru formuł. □

Lemat 1.1.3 (o jednoznaczności odczytania)**.** *Każda formuła ma dokładnie jedną z postaci:*

1. *zmienna,*
2. $\neg\varphi$ *dla jednoznacznie wyznaczonej* φ*,*
3. $(\varphi \circ \psi)$ *dla jednoznacznie wyznaczonych* φ, ψ *i* $\circ$*.*

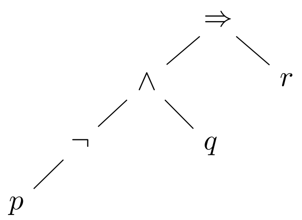
Dowód. To, że każda formuła ma którąś z tych postaci, wynika z definicji Form. Dla jednoznaczności wystarczy pokazać, że jeśli $(\varphi \circ \psi) = (\eta * \xi)$, to $\varphi = \eta$, $\psi = \xi$ i $\circ = *$. W tym celu wystarczy pokazać, że żadna formuła nie jest właściwym odcinkiem odcinkiem początkowym innej formuły. Przez indukcję po budowie formuły dowodzimy:

a) w każdej formule jest tyle samo lewych i prawych nawiasów.
b) właściwy odcinek początkowy formuły jest postaci $\neg \ldots \neg$ (być może pusty) lub zawiera więcej lewych niż prawych nawiasów.

$\square$

Uwaga. Można by definiować formuły jako drzewa. Na przykład:

$((\neg p \wedge q) \Rightarrow r)$:



Wniosek 1.1.4. *Poprawne jest definiowanie funkcji przez indukcję po budowie formuły:*

$$\begin{cases} f(p) = g_1(p), \\ f(\neg\varphi) = g_2(f(\varphi)), \\ f((\varphi \circ \psi)) = g_\circ(f(\varphi), f(\psi)), \end{cases}$$

dla uprzednio danych funkcji $g_1, g_2, g_\wedge, \ldots, g_\Leftrightarrow$.

1.2. Semantyka

Definicja 1.2.1. *Wartościowanie* to dowolna funkcja $\nu : \mathrm{Var} \to \{0, 1\}$.

Definicja 1.2.2. Niech ν będzie danym wartościowaniem. *Wartością formuły* φ przy wartościowaniu ν jest $\overline{\nu}(\varphi)$ dla funkcji $\overline{\nu}$ zdefiniowanej przez indukcję po budowie formuły:

- $\overline{\nu}(p) = \nu(p)$ dla $p \in \mathrm{Var}$,
- $\overline{\nu}(\neg p) = 1 - \overline{\nu}(\varphi)$,
- $\overline{\nu}(\varphi \wedge \psi) = \overline{\nu}(\varphi) \cdot \overline{\nu}(\psi)$,
- $\overline{\nu}(\varphi \vee \psi) = \max(\overline{\nu}(\varphi), \overline{\nu}(\psi))$,
- $\overline{\nu}(\varphi \Rightarrow \psi) = \max(1 - \overline{\nu}(\varphi), \overline{\nu}(\psi))$,
- $\overline{\nu}(\varphi \Leftrightarrow \psi) = (1 + \overline{\nu}(\varphi) + \overline{\nu}(\psi)) \bmod 2$.

Fakt 1.2.3. *Niech* $p_1, \ldots, p_n$ *będą wszystkimi zmiennymi występującymi w formule* φ*. Wtedy jeśli* $v{\restriction}_{\{p_1,\ldots,p_n\}} = w{\restriction}_{\{p_1,\ldots,p_n\}}$*, to* $\overline{v}(\varphi) = \overline{w}(\varphi)$*.*

Definicja 1.2.4.
- $\nu \models \varphi$ (ν *spełnia* φ), jeśli $\overline{\nu}(\varphi) = 1$.
- Jeśli T zbiór formuł (inaczej: *teoria*), to $\nu \models T$ (ν *spełnia* T), jeśli $\nu \models \varphi$ dla każdego $\varphi \in T$.
- $T \models \varphi$ (φ *wynika semantycznie* z T), jeśli dla każdego ν takiego, że $\nu \models T$, zachodzi $\nu \models \varphi$.

- φ jest *tautologią*, jeśli $\varnothing \models \varphi$ (piszemy $\models \varphi$).
- φ jest *spełnialna*, jeśli istnieje ν takie, że $\nu \models \varphi$.
- φ, ψ są *logicznie równoważne*, jeśli $\models \varphi \Leftrightarrow \psi$.

Przykład. 1. $\models p \vee \neg p$,
2. $\models (\neg p \Rightarrow p) \Rightarrow p$,
3. $\models q \Rightarrow (\neg q \Rightarrow q)$,
4. $(p \Rightarrow q)$ jest logicznie równoważne $(\neg p \vee q)$.

Uwaga. W sytuacji takiej jak w punkcie 4. mówimy, że jeden spójnik (w tym wypadku $\Rightarrow$) jest *definiowalny* za pomocą innych spójników (tutaj $\neg$ i $\vee$). Niekiedy będziemy chcieli przyjmować, że oficjalny zbiór spójników jest mniejszy niż zwyczajowe $\{\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$ (np. $\{\neg, \vee\}$), a spójniki definiowalne za pomocą „oficjalnych" służą wyłącznie do skrótowego zapisywania formuł (np. jeśli oficjalnym zbiorem spójników jest $\{\neg, \vee\}$, to $(\varphi \Rightarrow \psi)$ można traktować jako skrótowy zapis dla $(\neg\varphi \vee \psi)$).

1.3. Dowody

Naszym systemem dowodowym będzie *rachunek sekwentów*.

Definicja 1.3.1. *Sekwent* to napis postaci $\Gamma \to \Delta$, gdzie Γ, Δ to skończone ciągi formuł (Γ i Δ nazywamy *cedentami*).

Uwaga. Zamierzona interpretacja sekwentu $\Gamma \to \Delta$ mówi, że koniunkcja wszystkich formuł z Γ implikuje alternatywę wszystkich formuł z Δ. Ponieważ pusta koniunkcja jest zawsze spełniona, a pusta alternatywa — nigdy, to sekwent $\to \varphi$ orzeka, że zachodzi φ, a sekwent $\varphi \to$ orzeka, że zachodzi $\neg\varphi$. Ponadto, pusty sekwent, $\to$, nigdy nie jest spełniony.

Definicja 1.3.2. *Dowód* formuły φ to ciąg sekwentów $S_1, \ldots, S_n$ taki, że S_n jest postaci $\to \varphi$, a dla $1 \leqslant i \leqslant n$ sekwent S_i powstaje z (niektórych spośród) $S_1, \ldots, S_{i-1}$ za pomocą jednej z reguł rachunku sekwentów (lista reguł jest poniżej).
Dowód formuły φ z teorii T (ew. *na podstawie* T) to ciąg sekwentów jak wyżej, z tym, że S_n jest postaci $\Gamma \to \varphi$, gdzie $\Gamma \subseteq T$.

Notacja. $T \vdash \varphi$ oznacza: „φ ma dowód z T".

1.3.1. Reguły rachunku Sekwentów

$$\text{postać reguły: } \frac{\overbrace{S_1 \ldots S_n}^{\text{przesłanki}}}{\underbrace{S}_{\text{konkluzja}}}$$

Aksjomat

$$\frac{}{\varphi \longrightarrow \varphi}\ (\text{aksjomat})$$

Reguły strukturalne

$$\frac{\Gamma_1, \varphi, \psi, \Gamma_2 \longrightarrow \Delta}{\Gamma_1, \psi, \varphi, \Gamma_2 \longrightarrow \Delta}\ (\text{wymiana:L}) \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta_1, \varphi, \psi, \Delta_2}{\Gamma \longrightarrow \Delta_1, \psi, \varphi, \Delta_2}\ (\text{wymiana:R})$$

$$\frac{\Gamma, \varphi, \varphi \longrightarrow \Delta}{\Gamma, \varphi \longrightarrow \Delta}\ (\text{ściąganie:L}) \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta, \varphi, \varphi}{\Gamma \longrightarrow \Delta, \varphi}\ (\text{ściąganie:R})$$

$$\frac{\Gamma \longrightarrow \Delta}{\Gamma, \varphi \longrightarrow \Delta}\ (\text{osłabianie:L}) \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta}{\Gamma \longrightarrow \Delta, \varphi}\ (\text{osłabianie:R})$$

Reguły wprowadzania spójników

$$\frac{\Gamma, \varphi, \psi \longrightarrow \Delta}{\Gamma, \varphi \wedge \psi \longrightarrow \Delta}\ (\wedge\text{:L}) \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta, \varphi \qquad \Gamma \longrightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \longrightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi}\ (\wedge\text{:R})$$

$$\frac{\Gamma, \varphi \longrightarrow \Delta \qquad \Gamma, \psi \longrightarrow \Delta}{\Gamma, \varphi \vee \psi \longrightarrow \Delta}\ (\vee\text{:L}) \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Gamma \longrightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}\ (\vee\text{:R})$$

$$\frac{\Gamma \longrightarrow \Delta, \varphi}{\Gamma, \neg\varphi \longrightarrow \Delta}\ (\neg\text{:L}) \qquad \frac{\Gamma, \varphi \longrightarrow \Delta}{\Gamma \longrightarrow \Delta, \neg\varphi}\ (\neg\text{:R})$$

$$\frac{\Gamma \longrightarrow \Delta, \varphi \qquad \Gamma, \psi \longrightarrow \Delta}{\Gamma, \varphi \Rightarrow \psi \longrightarrow \Delta}\ (\Rightarrow\text{:L}) \qquad \frac{\Gamma, \varphi \longrightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \longrightarrow \Delta, \varphi \Rightarrow \psi}\ (\Rightarrow\text{:R})$$

Reguła cięcia

$$\frac{\Gamma, \varphi \longrightarrow \Delta \qquad \Gamma \longrightarrow \Delta, \varphi}{\Gamma \longrightarrow \Delta}\ (\text{cięcie})$$

Twierdzenie 1.3.3 (o pełności dla rachunku zdań). *$T \vdash \varphi$ wtedy i tylko wtedy gdy $T \models \varphi$.*

Wniosek 1.3.4 (twierdzenie o zwartości dla logiki zdań). *Jeśli $T \models \varphi$ to istnieje skończona $T_0 \subseteq T$ taka, że $T_0 \models \varphi$.*

Dowód. Jeśli $T \models \varphi$, to na mocy twierdzenia o pełności również $T \vdash \varphi$. Z definicji dowodu istnieje skończona T_0 taka, że $T_0 \vdash \varphi$, a zatem także $T_0 \models \varphi$. □

Uwaga. Użycia reguły wymiany nie będziemy na ogół zaznaczać.

Uwaga. Dowody w rachunku sekwentów można przedstawiać graficznie w postaci drzew, np:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$p \longrightarrow p$}
\LeftLabel{(osłabianie:R)}
\UnaryInfC{$p \longrightarrow p, q$}
\LeftLabel{($\neg$:L)}
\UnaryInfC{$\neg p, p \longrightarrow q$}
\AxiomC{$q \longrightarrow q$}
\RightLabel{(osłabianie:L)}
\UnaryInfC{$q, p \longrightarrow q$}
\RightLabel{($\vee$:L)}
\BinaryInfC{$\neg p \vee q, p \longrightarrow q$}
\RightLabel{($\Rightarrow$:R)}
\UnaryInfC{$\neg p \vee q \longrightarrow p \Rightarrow q$}
\AxiomC{$\neg p \vee q \longrightarrow \neg p \vee q$}
\RightLabel{($\wedge$:R)}
\BinaryInfC{$\neg p \vee q \longrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (p \Rightarrow q)$}
\RightLabel{($\Rightarrow$:R)}
\UnaryInfC{$\longrightarrow (\neg p \vee q) \Rightarrow [(\neg p \vee q) \wedge (p \Rightarrow q)]$}
\end{prooftree}
$$

1.4. Dowód twierdzenia o pełności dla rachunku zdań

Dowód twierdzenia o pełności rozbijemy na dwa kawałki.

Twierdzenie 1.4.1. *Jeśli $T \vdash \varphi$, to $T \models \varphi$.*

Twierdzenie 1.4.2. *Jeśli $T \models \varphi$, to $T \vdash \varphi$.*

Dowód twierdzenia 1.4.1. Przez indukcję po budowie dowodu pokazujemy, że zachodzi $(*)$: jeśli sekwent $\Gamma \to \Delta$ ma dowód, to alternatywa wszystkich formuł z Δ wynika semantycznie z Γ (ozn. $\Gamma \models \bigvee \Delta$). Zarówno krok bazowy (dla aksjomatów), jak i kroki indukcyjne (dla pozostałych reguł) są bezproblemowe.
Skoro $T \vdash \varphi$ to istnieje skończone $\Gamma \subseteq T$, że sekwent $\Gamma \models \varphi$ ma dowód. Na mocy $(*)$ mamy $\Gamma \models \varphi$, czyli tym bardziej $T \models \varphi$. $\square$

Definicja 1.4.3. Teoria T jest *sprzeczna*, jeśli istnieje dowód sekwentu $\Gamma \to$ dla pewnego $\Gamma \subseteq T$. W przeciwnym przypadku T jest *niesprzeczna*.

Stwierdzenie 1.4.4. *Następujące warunki są równoważne:*

1. *T sprzeczna,*
2. *dla każdej φ zachodzi $T \vdash \varphi$,*
3. *istnieje φ takie, że $T \vdash \varphi$ i $T \vdash \neg\varphi$*

Dowód. (1) $\Rightarrow$ (2). Mamy dowód $\Gamma \to$ dla pewnego $\Gamma \subseteq T$. Korzystając z osłabiania dostajemy dowód $\Gamma \to \varphi$.
(2) $\Rightarrow$ (3). Jasne.
(3) $\Rightarrow$ (1). Mamy dowody $\Gamma \to \varphi$ i $\Gamma' \Rightarrow \neg\varphi$ dla pewnych $\Gamma, \Gamma' \subseteq T$. Tworzymy dowód: Robimy:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\vdots$}
\UnaryInfC{$\Gamma \longrightarrow \varphi$}
\LeftLabel{(seria osłabień)}
\UnaryInfC{$\Gamma, \Gamma' \longrightarrow \varphi$}
\AxiomC{$\vdots$}
\UnaryInfC{$\Gamma' \longrightarrow \neg\varphi$}
\RightLabel{(seria osłabień)}
\UnaryInfC{$\Gamma, \Gamma' \longrightarrow \neg\varphi$}
\RightLabel{(cięcie)}
\BinaryInfC{$\Gamma, \Gamma' \longrightarrow$}
\end{prooftree}
$$

A zatem zachodzi (1). $\square$

Lemat 1.4.5. *Jeśli T jest niesprzeczna, to T spełnialna.*

Notacja. Zapis $T + \varphi$ oznacza $T \cup \{\varphi\}$.

Twierdzenie 1.4.2 łatwo wynika z lematu 1.4.5:

Dowód twierdzenia 1.4.2 z lematu 1.4.5. Jeśli $T \not\vdash \varphi$ to $T + \neg\varphi$ niesprzeczna (ćwiczenie). W takim razie na mocy lematu istnieje ν takie, że $\nu \models T + \neg\varphi$, czyli $T \not\models \varphi$. □

Dowód lematu 1.4.5. Dana T niesprzeczna. Na mocy lematu Kuratowskiego-Zorna rozszerzamy T do maksymalnej niesprzecznej teorii T^+ (ćwiczenie: sprawdzić, że założenia lematu K-Z są spełnione). Definiujemy wartościowanie

$$\nu(p) = \begin{cases} 1 & p \in T^+ \\ 0 & p \notin T^+. \end{cases}$$

Musimy teraz sprawdzić:

$$\text{dla dowolnej } \varphi,\ \nu \models \varphi \text{ zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy } \varphi \in T^+. \qquad (\spadesuit)$$

Sprawdzenie ($\spadesuit$) wykonamy przez indukcję po budowie formuły.
(zmienna): spełnione z definicji ν.
($\neg$): wystarczy pokazać, że dokładnie jedna formuła z pary φ, $\neg\varphi$ jest elementem T^+. Na pewno nie może być tak, że obie formuły $\varphi, \neg\varphi$ są w T^+, bo wtedy T^+ byłaby sprzeczna, wbrew wyborowi T^+. Załóżmy więc, że $\varphi \notin T^+$ i $\neg\varphi \notin T^+$. Wtedy z maksymalności T^+ wnioskujemy, że $T^+ + \varphi$ i $T^+ + \neg\varphi$ są sprzeczne. Mamy dowody:

$$\dfrac{\vdots}{\Gamma, \varphi \ \longrightarrow} \qquad\qquad \dfrac{\vdots}{\Gamma', \neg\varphi \ \longrightarrow}$$

dla pewnych $\Gamma, \Gamma' \subseteq T^+$. Robimy:

$$\dfrac{\dfrac{(\neg{:}\mathrm{R})\ \dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma, \varphi \ \longrightarrow}}{\Gamma \ \longrightarrow \neg\varphi}}{\Gamma, \Gamma' \ \longrightarrow \neg\varphi} \qquad \dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma', \neg\varphi \ \longrightarrow}}{\Gamma, \Gamma', \neg\varphi \ \longrightarrow}}{\Gamma, \Gamma' \ \longrightarrow}\ (\text{cięcie})$$

a zatem T^+ sprzeczna.
($\Rightarrow$): wystarczy pokazać, że $(\varphi \Rightarrow \psi) \in T^+$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi \notin T^+$ lub $\psi \in T^+$.

- Załóżmy, że $\psi \in T^+$. Załóżmy, że $(\varphi \Rightarrow \psi) \notin T^+$, czyli $T^+ + (\varphi \Rightarrow \psi)$ sprzeczna. Mamy:

$$\dfrac{\vdots}{\Gamma, \varphi \Rightarrow \psi \ \longrightarrow}$$

  dla pewnego $\Gamma \subseteq T^+$. Robimy:

$$\dfrac{(\text{osłabianie:L})\ \dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma, \varphi \Rightarrow \psi \ \longrightarrow}}{\Gamma, \psi, \varphi \Rightarrow \psi \ \longrightarrow} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\psi \ \longrightarrow \psi}{\psi, \varphi \ \longrightarrow \psi}}{\psi \ \longrightarrow \varphi \Rightarrow \psi}\ (\Rightarrow{:}\mathrm{R})}{\Gamma, \psi \ \longrightarrow \varphi \Rightarrow \psi}\ (\text{osłabianie:L})}{\Gamma, \psi \ \longrightarrow}\ (\text{cięcie})$$

Ale $\Gamma \cup \{\psi\} \subseteq T^+$, więc T^+ sprzeczna.

- Załóżmy, że $\varphi \notin T^+$, czyli $T^+ + \varphi$ sprzeczne. Załóżmy, że $(\varphi \Rightarrow \psi) \notin T^+$, czyli $T^+ + (\varphi \Rightarrow \psi)$ sprzeczna. Mamy:

$$\frac{\vdots}{\Gamma, \varphi \longrightarrow} \qquad \frac{\vdots}{\Gamma', \varphi \Rightarrow \psi \longrightarrow}$$

Robimy:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma, \varphi \longrightarrow}}{\Gamma \longrightarrow \neg\varphi} \quad (\neg\text{:R})\ \dfrac{\dfrac{\varphi \longrightarrow \varphi, \psi}{\longrightarrow \varphi, \varphi \Rightarrow \psi}\ (\Rightarrow\text{:R})}{\neg\varphi \longrightarrow \varphi \Rightarrow \psi}\ (\neg\text{:L})}{\Gamma \longrightarrow \varphi \Rightarrow \psi}\ (\text{cięcie}) \qquad \dfrac{\vdots}{\Gamma', \varphi \Rightarrow \psi \longrightarrow}$$
$$\overline{\qquad\qquad \Gamma, \tilde{\Gamma} \longrightarrow \qquad\qquad}\ (\text{osłabienia i cięcie})$$

- Załóżmy, że $(\varphi \Rightarrow \psi) \in T^+$, $\varphi \in T^+, \psi \notin T^+$. W takim razie $T^+ + \psi$ jest sprzeczna. Mamy więc:

$$\frac{\vdots}{\Gamma, \psi \longrightarrow}$$

Robimy:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma, \psi \longrightarrow}}{\Gamma, \varphi, \psi \longrightarrow} \qquad \dfrac{\varphi \longrightarrow \varphi}{\Gamma, \varphi \longrightarrow \varphi}}{T^+ \supseteq \Gamma, \varphi, \varphi \Rightarrow \psi \longrightarrow}\ (\Rightarrow\text{:L})$$

Skoro $(\varphi \Rightarrow \psi) \in T^+$ i $\varphi \in T^+$, wnioskujemy, że T^+ jest sprzeczna.

Kroki $(\wedge)$ i $(\vee)$ w dowodzie (♠) są podobne do kroku $(\Rightarrow)$, ale prostsze. Pozostawiamy je jako ćwiczenie. □

Uwaga. Zachodzi twierdzenie o eliminacji cięcia: jeśli sekwent $\Gamma \to \Delta$ ma dowód to ma dowód nieużywający reguły cięcia.

Stwierdzenie 1.4.6. *$T \vdash \varphi$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje dowód sekwentu $\to \varphi$ używający jako dodatkowych aksjomatów sekwentów postaci $\to \gamma$ dla $\gamma \in T$*

Dowód. Ćwiczenia. □

2. Struktury relacyjne

Chcemy teraz zdefiniować obiekty, które mogą służyć do nadawania wartości logicznych takim napisom jak np.:

$$\forall x\, \exists y\, (x + f(x) \leqslant y + 0),$$
$$\forall x\, \forall y\, (xRy \Rightarrow \exists z\; xRz \wedge zRy)\,.$$

Definicja 2.0.1. *Sygnatura* to trójka $\sigma = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle$, gdzie:

- $\mathcal{R}$ składa się z par postaci $\langle R, ar(R) \rangle$ gdzie R to *symbol relacyjny*, a $ar(R) \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ to liczba argumentów (arność) symbolu R.
- $\mathcal{F}$ składa się z par postaci $\langle f, ar(f) \rangle$ gdzie f to *symbol funkcyjny*, a $ar(f) \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ to liczba argumentów (arność) symbolu f,
- $\mathcal{C}$ to zbiór *stałych (indywiduowych)*.

Uwaga. Będziemy pisać np. $R \in \sigma$, $f \in \sigma$.

Definicja 2.0.2. Niech σ będzie sygnaturą. *Struktura* sygnatury σ to krotka:

$$\mathbf{A} = \left\langle A, (R^{\mathbf{A}})_{R \in \sigma}, (f^{\mathbf{A}})_{f \in \sigma}, (c^{\mathbf{A}})_{c \in \sigma} \right\rangle,$$

gdzie:

- A jest niepustym zbiorem (*uniwersum* struktury $\mathbf{A}$)
- dla wszystkich $R \in \sigma$, $R^{\mathbf{A}}$ jest $ar(R)$-argumentową relacją na A (tj. $R^{\mathbf{A}} \subseteq A^{ar(R)}$),
- dla wszystkich $f \in \sigma$, f jest $ar(f)$-argumentowym działaniem na A (tj. $f^{\mathbf{A}} \colon A^{ar(f)} \to A$),
- $c^{\mathbf{A}} \in A$ dla wszystkich $c \in \sigma$.

Notacja. Niekiedy liczbę argumentów symbolu relacyjnego bądź funkcyjnego będziemy oznaczać w górnym indeksie (np. R^2, f^3).

Przykład (struktur relacyjnych)**.**

1. Strukturami sygnatury $\{R^2\}$ są np. częściowe porządki (wtedy zamiast R piszemy najczęściej $\leqslant, \preccurlyeq$), relacje równoważności (wtedy zwykle piszemy $\sim, \approx, \equiv$), ale również modele teorii mnogości Zermelo-Fraenkla (wtedy w zależności od kontekstu piszemy np. E albo $\in$).
2. Grupy można traktować jako struktury sygnatury $\{\cdot^2\}$ albo $\{\cdot^2, (^{-1})^1; e\}$.
3. Pierścienie i ciała to struktury sygnatury $\{+^2, \cdot^2; 0, 1\}$.
4. Pierścienie i ciała uporządkowane to struktury sygnatury $\{\leqslant^2; +^2, \cdot^2; 0, 1\}$.

Półprzykład. Przestrzenie liniowe można reprezentować jako struktury relacyjne na co najmniej dwa sposoby, z których każdy ma swoje wady:

1. Dla ustalonego ciała K, przestrzenie liniowe nad K można traktować jako struktury z uniwersum V, działaniem dwuargumentowym $+$ i *osobnym* działaniem jednoargumentowym $k\cdot$ dla każdego $k \in K$.
2. Można też traktować przestrzenie liniowe jako struktury o uniwersum będącym sumą rozłączną K i V, z jednoargumentową relacją na oznaczenie K i działaniami $+, \cdot$ arbitralnie określonymi tam, gdzie nie mają naturalnych definicji.

Nieprzykład. Przestrzenie topologiczne nie są strukturami relacyjnymi w naszym rozumieniu, bo topologia to rodzina *podzbiorów* uniwersum, a nie elementów uniwersum.

Definicja 2.0.3. $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ ($\mathbf{A}$ jest *podstrukturą* $\mathbf{B}$, inaczej: $\mathbf{B}$ jest *rozszerzeniem* $\mathbf{A}$), jeśli:

(i) $A \subseteq B$,
(ii) $R^{\mathbf{A}} = R^{\mathbf{B}}\restriction_{A^n}$ dla każdego $R^n \in \sigma$,
(iii) $f^{\mathbf{A}} = f^{\mathbf{B}}\restriction_{A^n}$ dla każdego $f^n \in \sigma$ (w szczególności A jest zamknięte na działanie $f^{\mathbf{B}}$),
(iv) $c^{\mathbf{A}} = c^{\mathbf{B}}$ dla każdej $c \in \sigma$ (w szczególności $c^{\mathbf{B}} \in A$).

Przykład. Pojęcie podstruktury jest silnie zależne od sygnatury. Niech $\mathbf{G}$ będzie grupą traktowaną jako struktura sygnatury $\{\cdot, ^{-1}, e\}$. Wtedy podstruktury $\mathbf{G}$ to dokładnie podgrupy $\mathbf{G}$. Jeśli jednak $\mathbf{G}$ traktujemy jako strukturę sygnatury $\{\cdot\}$, to podstrukturami $\mathbf{G}$ są wszystkie podpółgrupy $\mathbf{G}$. Tak więci np. podstrukturą grupy $(\mathbb{Z}, +)$ jest $(\{5, 6, 7, \ldots\}, +)$.

Stwierdzenie 2.0.4. *Dla danej struktury* $\mathbf{A}$ *i zbioru* $X \subseteq A$ *istnieje co najwyżej jedna podstruktura* $\mathbf{A}$*, której uniwersum jest zbiór* X*.*

Stwierdzenie 2.0.5. *Dla danej struktury* $\mathbf{A}$ *i zbioru* $\varnothing \neq X \subseteq A$ *istnieje najmniejszy zbiór* Y*,* $X \subseteq Y \subseteq A$*, taki, że istnieje podstruktura* $\mathbf{A}$ *o uniwersum* Y*. (Tę podstrukturę nazywamy podstrukturą* generowaną *przez* X*.)*

Definicja 2.0.6. Niech $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ będą strukturami sygnatury σ. *Homomorfizm* z $\mathbf{A}$ w $\mathbf{B}$ to dowolna funkcja $h\colon A \to B$ spełniająca:

1. $h(c^{\mathbf{A}}) = c^{\mathbf{B}}$ dla $c \in \sigma$,
2. $h(f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathbf{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n))$ dla $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{A}$ i $f^n \in \sigma$,
3. jeśli $(a_1, \ldots, a_n) \in R^{\mathbf{A}}$, to $(h(a_1), \ldots, h(a_n)) \in R^{\mathbf{B}}$ dla $a_1, \ldots, a_n \in A$ i $R \in \sigma$.

Definicja 2.0.7. Homomorfizm jest *silnym homomorfizmem*, jeśli dla wszystkich $a_1, \ldots, a_n \in A$ i $R \in \sigma$ spełnia dodatkowy warunek:

4. jeśli $(h(a_1), \ldots, h(a_n)) \in R^{\mathbf{B}}$, to istnieją $a'_1, \ldots, a'_n \in A$ t. że $h(a_1) = h(a'_1), \ldots, h(a_n) = h(a'_n)$, a ponadto $(a'_1, \ldots, a'_n) \in R^{\mathbf{A}}$.

Notacja. Będziemy często używać zapisu w stylu $\overline{a}$ na oznaczenie krotek i pisać np. $\overline{a} \in A$ bądź $h(f^{\mathbf{A}}(\overline{a})) = f^{\mathbf{B}}(h(\overline{a}))$.

Definicja 2.0.8. Iniektywny silny homomorfizm nazywamy *monomorfizmem* bądź *zanurzeniem.* Surjektywne zanurzenie nazywamy *izomorfizmem.* Izomorfizm z $\mathbf{A}$ w $\mathbf{A}$ nazywamy *automorfizmem* struktury $\mathbf{A}$.

Obserwacja. Jeśli h jest homomorfizmem z $\mathbf{A}$ w $\mathbf{B}$, to istnieje podstruktura $\mathbf{B}$ o uniwersum $h[A]$; podstrukturę tę oznaczamy przez $h[\mathbf{A}]$. Jeśli h jest zanurzeniem z $\mathbf{A}$ w $\mathbf{B}$, to $h[\mathbf{A}]$ jest izomorficzne z $\mathbf{A}$.

3. Logika pierwszego rzędu

3.1. Składnia

Dany jest *przeliczalny* zbiór *zmiennych indywiduowych* Var. Zmienne oznaczamy np. symbolami $x, y, z, \ldots$ (albo $x_1, x_2, \ldots$).

Definicja 3.1.1. Zbiór *termów* sygnatury σ to najmniejszy zbiór spełniający:

(i) każda $x \in \mathrm{Var}$ jest termem.
(ii) c jest termem dla $c \in \sigma$,
(iii) jeśli $t_1, \ldots, t_n$ są termami i $f^n \in \sigma$, to $f(t_1, \ldots, t_n)$ jest termem.

Definicja 3.1.2. *Formuła atomowa* sygnatury σ to dowolny napis postaci:
- $R(t_1, \ldots, t_n)$, dla termów $t_1, \ldots, t_n$ i $R^n \in \sigma$,
- $t_1 = t_2$, dla termów t_1, t_2.

Definicja 3.1.3. Zbiór *formuł* sygnatury σ to najmniejszy zbiór spełniający:

(i) każda formuła atomowa jest formułą,
(ii) jeśli φ jest formułą to $\neg\varphi$ jest formułą,
(iii) jeśli φ, ψ są formułami, to $(\varphi \circ \psi)$ jest formułą, dla $\circ \in \{\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$,
(iv) jeśli φ jest formułą i $x \in \mathrm{Var}$, to $\exists x\, \varphi$ oraz $\forall x\, \varphi$ są formułami.

Uwaga. Mamy jednoznaczność odczytania dla termów/formuł, a zatem możemy używać definicji przez indukcję po budowie termu/formuły.

Definicja 3.1.4. Zbiór $FV(\varphi)$ *zmiennych wolnych* formuły φ definiujemy przez indukcję po budowie φ:
- jeśli φ atomowa, to $FV(\varphi)$ jest zbiorem wszystkich zmiennych występujących w φ.
- $FV(\neg\varphi) = FV(\varphi)$,
- $FV(\varphi \circ \psi) = FV(\varphi) \cup FV(\psi)$ dla $\circ \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$,
- $FV(\exists x\, \varphi) = F(\forall x\, \varphi) = FV(\varphi) \setminus \{x\}$.

Zmienną, która występuje w φ i nie jest wolna w φ, nazywamy *związaną* w φ.

Przykład. W formule $\exists y\, (\forall x R(x, y) \wedge S(x))$ zmienna x jest wolna, a zmienna y związana.

Notacja. Zapis $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ oznacza domyślnie, że $FV(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$.

3.2. Semantyka

Obserwacja. Nie da się sensownie przypisać wartości logicznej formule $\exists y\,(x = y{+}y)$ w strukturze $(\mathbb{N}, +)$, dopóki nie wiemy, co oznacza zmienna x.

Definicja 3.2.1. *Wartościowanie* w strukturze $\mathbf{A}$ to dowolna funkcja $\nu\colon \mathrm{Var} \to A$.

Definicja 3.2.2. Niech $\mathbf{A}$ będzie strukturą sygnatury σ i niech t będzie termem sygnatury σ. *Wartość termu t* w $\mathbf{A}$ przy wartościowaniu ν, czyli $t^{\mathbf{A}}[\nu]$, definiujemy przez indukcję:

(i) $x^{\mathbf{A}}[\nu] = \nu(x)$ dla $x \in \mathrm{Var}$,
(ii) $c^{\mathbf{A}}[\nu] = c^{\mathbf{A}}$ dla $c \in \sigma$,
(iii) $(f(t_1, \ldots, t_n))^{\mathbf{A}}[\nu] = f^{\mathbf{A}}(t_1^{\mathbf{A}}[\nu], \ldots, t_n^{\mathbf{A}}[\nu])$.

Definicja 3.2.3. Jeśli ν wartościowanie, $a \in A$ to $\nu[a/x]$ to wartościowanie ω spełniające:

$$\begin{cases} \omega(x) = a, \\ \omega(y) = \nu(y) & \text{dla } y \neq x \end{cases}$$

Definicja 3.2.4. Relację $\mathbf{A} \models \varphi[\nu]$ (φ jest *spełnione* w $\mathbf{A}$ przy wartościowaniu ν) definiujemy przez indukcję po φ:

(i) $\mathbf{A} \models R(t_1, \ldots, t_n)[\nu]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\left(t_1^{\mathbf{A}}[\nu], \ldots, t_n^{\mathbf{A}}[\nu]\right) \in R^{\mathbf{A}}$, dla termów $t_1, \ldots, t_n$ i $R^n \in \sigma$,
(ii) $\mathbf{A} \models (t_1 = t_2)[\nu]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $t_1^{\mathbf{A}}[\nu] = t_2^{\mathbf{A}}[\nu]$,
(iii) $\mathbf{A} \models (\neg\varphi)[\nu]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{A} \not\models \varphi[\nu]$,
(iv) $\mathbf{A} \models (\varphi \land \psi)[\nu]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{A} \models \varphi[\nu]$ i $\mathbf{A} \models \psi[\nu]$; analogicznie dla $\lor, \Rightarrow, \Leftrightarrow$,
(v) $\mathbf{A} \models \exists x\, \varphi[\nu]$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $a \in A$ takie, że $\mathbf{A} \models \varphi\,[\nu[a/x]]$,
(vi) $\mathbf{A} \models \forall x\, \varphi[\nu]$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $a \in A$, $\mathbf{A} \models \varphi\,[\nu[a/x]]$.

Stwierdzenie 3.2.5. *Niech ν, ω wartościowania takie, że $\nu\restriction_{FV(\varphi)} = \omega\restriction_{FV(\varphi)}$. Wtedy $\mathbf{A} \models \varphi[\nu]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{A} \models \varphi[\omega]$.*

Dowód. Indukcja po budowie formuły.

- Krok atomowy: przez osobną indukcję po budowie termu pokazujemy, że dla każdego termu t, jeśli v i w są zgodne we wszystkich zmiennych występujących w t, to $t^{\mathbf{A}}[\nu] = t^{\mathbf{A}}[\omega]$. Następnie:
  - φ postaci $t_1 = t_2$: $\mathbf{A} \models (t_1 = t_2)[\nu]$ wtw $t_1^{\mathbf{A}}[\nu] = t_2^{\mathbf{A}}[\nu]$ wtw $t_1^{\mathbf{A}}[\omega] = t_2^{\mathbf{A}}[\omega]$ wtw $\mathbf{A} \models (t_1 = t_2)[\omega]$,
  - φ postaci $R(t_1, \ldots, t_n)$: $\mathbf{A} \models R(t_1, \ldots, t_n)[\nu]$ wtw $(t_1^{\mathbf{A}}[\nu], \ldots, t_n^{\mathbf{A}}[\nu]) \in R^{\mathbf{A}}$ wtw $(t_1^{\mathbf{A}}[\omega], \ldots, t_n^{\mathbf{A}}[\omega]) \in R^{\mathbf{A}}$ wtw $\mathbf{A} \models R(t_1, \ldots, t_n)[\omega]$.
- Kroki dla spójników: natychmiastowe.

- Kroki dla kwantyfikatorów na przykładzie $\exists$ (krok dla $\forall$ analogicznie).
  Niech $\varphi = \exists x\, \psi$. Wtedy $FV(\varphi) = FV(\psi) \setminus \{x\}$. $\mathbf{A} \models \exists x\, \psi[\nu]$ wtw istnieje $a \in A$ t. że $\mathbf{A} \models \psi[\nu[a/x]]$. Dla dowolnego a, $\nu[a/x]{\restriction}_{FV(\varphi)\cup\{x\}} = \omega[a/x]{\restriction}_{FV(\varphi)\cup\{x\}}$, więc z założenia indukcyjnego: istnieje $a \in A$ t. że $\mathbf{A} \models \psi[\nu[a/x]]$ wtw istnieje $a \in A$ t. że $\mathbf{A} \models \psi[\omega[a/x]]$ wtw $\mathbf{A} \models \exists x\, \psi[\omega]$.

□

Notacja. Dla danej formuły $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, zamiast pisać „$\mathbf{A} \models \varphi[\nu]$ dla wartościowania ν takiego, że $\nu(x_1) = a_1, \ldots, \nu(x_n) = a_n$”, piszemy $\mathbf{A} \models \varphi\,[a_1/x_1, \ldots, a_n/x_n]$ bądź $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$, bądź nawet, jeśli nie prowadzi to do nieporozumień, $\mathbf{A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$.

Definicja 3.2.6. Formuła φ jest *zdaniem*, jeśli $FV(\varphi) = \varnothing$. Zdanie φ jest *prawdziwe* w $\mathbf{A}$ (ozn. $\mathbf{A} \models \varphi$), jeśli istnieje ν takie, że $\mathbf{A} \models \varphi[\nu]$ (równoważnie: jeśli dla każdego ν zachodzi $\mathbf{A} \models \varphi[\nu]$).

Przykład. W strukturze $(\mathbb{N}, \leqslant)$ formuła $\forall y\; x \leqslant y$ jest spełniona przy wartościowaniu $x \mapsto 0$, a nie jest spełniona przy wartościowaniu $x \mapsto 1$. Zdanie $\exists x\, \forall y\, x \leqslant y$ jest prawdziwe.

Definicja 3.2.7.
- Dla T zbioru zdań (inaczej: teorii), $\mathbf{A} \models T$ ($\mathbf{A}$ *spełnia* T), jeśli dla każdego $\varphi \in T$ zachodzi $\mathbf{A} \models \varphi$.
- $T \models \varphi$ (φ *wynika semantycznie* z T), jeśli dla dowolnej struktury $\mathbf{A}$: jeśli $\mathbf{A} \models T$, to $\mathbf{A} \models \varphi$.
- $\models \varphi$ (φ jest *tautologią logiki pierwszego rzędu*), jeśli $\varnothing \models \varphi$.

Przykład (Tautologie logiki pierwszego rzędu)**.**
- $\exists x\, R(x,x) \vee \neg \exists x\, R(x,x)$
- $\exists x\, (x = x)$
- $\forall x\, \forall y\, (x = y \wedge R(x) \Rightarrow R(y))$
- $\exists x\, (R(x) \Rightarrow \forall y\, R(y))$

Zauważmy, że pierwsze z powyższych zdań (i tylko ono) jest tautologią na mocy praw samej logiki zdań, w tym wypadku na mocy znaczenia spójników $\neg, \wedge$.

Uwaga. Można rozważać pojęcia $T \models \varphi$ oraz $\models \varphi$ również dla T, φ dopuszczających zmienne wolne. Wtedy $T \models \varphi$ znaczy: dla każdych $\mathbf{A}$ i ν, jeśli $\mathbf{A} \models T[\nu]$, to $\mathbf{A} \models \varphi[\nu]$, natomiast $\models \varphi$ znaczy: dla każdych $\mathbf{A}$ i ν zachodzi $\mathbf{A} \models \varphi[\nu]$.
Zauważmy, że jeśli $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ jest formułą ze zmiennymi wolnymi, to $\models \varphi$ zachodzi dokładnie wtedy, gdy $\models \forall x_1 \ldots \forall x_n\, \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ (gdzie $\forall x_1 \ldots \forall x_n\, \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ jest już zdaniem).

Stwierdzenie 3.2.8. *Niech $h\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ będzie izomorfizmem, $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ dowolną formułą, $a_1, \ldots, a_n \in A$. Wtedy $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{B} \models \varphi[h(a_1), \ldots, h(a_n)]$ (w skrótowym zapisie: $\mathbf{A} \models \varphi[\bar{a}]$ wtw $\mathbf{B} \models \varphi[h(\bar{a})]$).*

Dowód. Indukcja po budowie φ. W celu przejścia przez krok atomowy musimy przez osobną indukcję po budowie termu udowodnić, że

$$\text{dla dowolnego termu } t \text{ spełniona jest równość } h(t^{\mathbf{A}}[\bar{a}]) = t^{\mathbf{B}}[h(\bar{a})]. \tag{$\sharp$}$$

Sprawdźmy, że ($\sharp$) rzeczywiście zachodzi:

- dla $t = x_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$: $h(t^{\mathbf{A}}[\bar{a}]) = h(a_i) = t^{\mathbf{B}}[h(\bar{a})]$,
- dla $t = c$: $h(t^{\mathbf{A}}[\bar{a}]) = h(c^{\mathbf{A}}) = c^{\mathbf{B}} = t^{\mathbf{B}}[h(\bar{a})]$,
- dla $t = f(t_1, \ldots, t_k)$: mamy $h(t^{\mathbf{A}}[\bar{a}]) = h(f^{\mathbf{A}}(t_1^{\mathbf{A}}[\bar{a}], \ldots, t_k^{\mathbf{A}}[\bar{a}]))$. Z definicji homomorfizmu, to drugie wyrażenie jest równe $f^{\mathbf{B}}(h(t_1^{\mathbf{A}}[\bar{a}]), \ldots, h(t_k^{\mathbf{A}}[\bar{a}]))$, a to jest z założenia indukcyjnego równe $f^{\mathbf{B}}(t_1^{\mathbf{B}}[h(\bar{a})], \ldots, t_k^{\mathbf{B}}[h(\bar{a})]) = t^{\mathbf{B}}[h(\bar{a})]$.

Przechodzimy teraz do indukcji po budowie formuły.
Dla φ atomowej postaci $t_1 = t_2$: $\mathbf{A} \models t_1 = t_2[\bar{a}]$ wtw $t_1^{\mathbf{A}}[\bar{a}] = t_2^{\mathbf{A}}[\bar{a}]$ wtw $h(t_1^{\mathbf{A}}[\bar{a}]) = h(t_2^{\mathbf{A}}[\bar{a}])$) (bo h jest iniekcją) wtw $t_1^{\mathbf{B}}[h(\bar{a})] = t_2^{\mathbf{B}}[h(\bar{a})]$ (na mocy ($\sharp$)) wtw $\mathbf{B} \models t_1 = t_2[h(\bar{a})]$.
Dla φ atomowej postaci $R(t_1, \ldots, t_k)$: $\mathbf{A} \models R(t_1, \ldots, t_k)[\bar{a}]$ wtw $(t_1^{\mathbf{A}}[\bar{a}], \ldots, t_k^{\mathbf{A}}[\bar{a}]) \in R^{\mathbf{A}}$ wtw $(h(t_1^{\mathbf{A}}[\bar{a}]), \ldots, h(t_k^{\mathbf{A}}[\bar{a}])) \in R^{\mathbf{B}}$ (bo h jest monomorfizmem) wtw $(t_1^{\mathbf{B}}[h(\bar{a})], \ldots, t_k^{\mathbf{B}}[h(\bar{a})]) \in R^{\mathbf{B}}$ (na mocy ($\sharp$)) wtw $\mathbf{B} \models R(t_1, \ldots, t_k)[h(\bar{a})]$.
Kroki dla spójników są bezproblemowe. W kroku dla kwantyfikatorów wystarczy rozważyć φ postaci $\exists y\, \psi(\bar{x}, y)$.
Jeśli $\mathbf{A} \models \exists y\, \psi(\bar{x}, y)[\bar{a}]$, to jest $\alpha \in A$ takie, że $\mathbf{A} \models \psi[\bar{a}, \alpha]$, więc z założenia indukcyjnego $\mathbf{B} \models \psi[h(\bar{a}), h(\alpha)]$ i w związku z tym $\mathbf{B} \models \exists y\, \psi[h(\bar{a}, y)]$.
W drugą stronę, jeśli $\mathbf{B} \models \exists y\, \psi(\bar{x}, y)[h(\bar{a})]$, to istnieje $\beta \in B$ takie, że $\mathbf{B} \models \psi[h(\bar{a}), \beta]$. Przekształcenie h jest surjekcją, więc istnieje $\alpha \in A$ takie, że $h(\alpha) = \beta$. Mamy $\mathbf{B} \models \psi[h(\bar{a}), h(\alpha)]$, a więc z założenia indukcyjnego $\mathbf{A} \models \psi[\bar{a}, \alpha]$ i w związku z tym $\mathbf{A} \models \exists y\, \psi[\bar{a}, y]$. □

Definicja 3.2.9. Niech $\mathbf{A}$ będzie strukturą, $S \subseteq A^n$.
Zbiór S jest *definiowalny bez parametrów* w $\mathbf{A}$, jeśli istnieje $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ takie, że

$$S = \{(a_1, \ldots, a_n) \in A^n : \mathbf{A} \models \varphi[\bar{a}]\}.$$

Zbiór S jest *definiowalny* (*z parametrami*) w $\mathbf{A}$, jeśli istnieje $\varphi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k)$ i istnieją $p_1, \ldots, p_k \in A$ takie, że

$$S = \{(a_1, \ldots, a_n) \in A^n : \mathbf{A} \models \varphi[\bar{a}, \bar{p}]\}.$$

Wniosek 3.2.10. *Niech* $\mathbf{A}$ *struktura,* $S \subseteq A^n$*,* h *automorfizm* $\mathbf{A}$ *taki, że dla pewnej krotki* $\bar{a} \in A^n$ *zachodzi* $\bar{a} \in S$*, ale* $h(\bar{a}) \notin S$*. Wtedy* S *nie jest definiowalny bez parametrów w* $\mathbf{A}$*.*

Dowód. Niech $\mathbf{A}, S, h, \bar{a}$ będą takie, jak w założeniach wniosku. Załóżmy, że $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ definiuje S, czyli $S = \{\bar{b} \in A^n : \mathbf{A} \models \varphi(\bar{b})\}$. Wtedy $\mathbf{A} \models \varphi[\bar{a}]$, więc na mocy stwierdzenia 3.2.8 $\mathbf{A} \models \varphi[h(\bar{a})]$. Czyli $h(a) \in S$ wbrew założeniu. □

Przykład.

1. Zbiór P parzystych liczb naturalnych jest definiowalny bez parametrów w $(\mathbb{N}, +)$ formułą $\exists y\, (x = y + y)$.
2. Zbiór P nie jest definiowalny bez parametrów w $(\mathbb{R}, +)$, bo $h(x) = \frac{3}{2}x$ jest automorfizmem $(\mathbb{R}, +)$ ale $S \ni h(2) = 3 \notin P$.

3. Zbiór P nie jest definiowalny bez parametrów w $(\mathbb{N}, \cdot)$ (por. h zamieniające 2 z 3 i równe funkcji identycznościowej na innych liczbach pierwszych).
4. Zbiór S składający się z liczb naturalnych będących kwadratami nie jest definiowalny w $(\mathbb{N}, +)$. Struktura $(\mathbb{N}, +)$ nie ma nietrywialnych automorfizmów, więc potrzebne jest inne uzasanienie niedefiniowalności (jak zdążymy, to podamy je w styczniu).

3.3. Aksjomatyzowalność

Definicja 3.3.1. Struktura $\mathbf{A}$ jest *modelem* teorii T, jeśli $\mathbf{A} \models T$. Jeśli T jest teorią w sygnaturze σ, to $MOD_\sigma(T)$ oznacza klasę wszystkich struktur sygnatury σ będących modelami T.

Definicja 3.3.2. Klasa $\mathcal{K}$ struktur danej sygnatury σ jest *aksjomatyzowalna* jeśli istnieje T taka, że $\mathcal{K} = MOD_\sigma(T)$. Jeśli T jest skończona, to $\mathcal{K}$ jest *skończenie aksjomatyzowalna*.

Przykład (klasy aksjomatyzowalne/teorie)**.**

1. Częściowe porządki, liniowe porządki, relacje równoważności (skończenie aksjomatyzowalne).
2. Algebry Boole'a (skończenie aksjomatyzowalne)[1].
3. Pierścienie, ciała, pierścienie/ciała uporządkowane (skończenie aksjomatyzowalne).
4. Ciała charakterystyki p, gdzie p-liczba pierwsza (skończenie aksjomatyzowalne).
5. Ciała charakterystyki 0 (nie są skończenie aksjomatyzowalne).
6. Klasa struktur nieskończonych (o nieskończonym uniwersum) danej struktury. Aksjomatyka:

$$\exists x_0\, \exists x_1\, (x_0 \neq x_1)$$
$$\exists x_0\, \exists x_1\, \exists x_2\, (x_0 \neq x_1 \wedge x_1 \neq x_2 \wedge x_0 \neq x_2)$$
$$\dots$$

(ta klasa nie jest skończenie aksjomatyzowalna).

7. Teoria mnogości ZFC to teoria w sygnaturze z jedną relacją 2-argumentową $\in$, aksjomatyzująca klasę modeli ZFC (a w zamierzeniu aksjomatyzująca własności *uniwersum teoriomnogościowego*). Aksjomaty ($\varnothing$, $\cup$ itp. to skróty odpowiednich napisów w języku używającym tylko $\in$):
   - aksjomat ekstensjonalności $\forall x\, \forall y\, (x = y \Leftrightarrow \forall z\, (z \in x \Leftrightarrow z \in y))$
   - aksjomat istnienia zbioru pustego: $\exists x\, \forall y\, (y \notin x)$
   - kilka aksjomatów orzekających wykonalność podstawowych konstrukcji: suma, zbiór potęgowy itp.
   - aksjomat nieskończoności $\exists x\, (\varnothing \in x \wedge \forall y\, (y \in x \Rightarrow y \cup \{y\} \in x))$
   - schemat wyróżniania: dla każdej formuły $\varphi(x, \bar{y})$ aksjomatem ZFC jest

$$\forall z\, \forall \bar{y}\, \exists w\, \forall x\ (x \in w \Leftrightarrow (x \in z \wedge \varphi(x, \bar{y})))$$

[1] Definicja na ćwiczeniach.

- schemat zastępowania: dla każdej formuły $\varphi(x, y, \bar{u})$ aksjomatem ZFC jest

$$\forall \bar{u} \left(\forall x \, \exists^{=1} y \, \varphi(x, y, \bar{u}) \Rightarrow \forall z \, \exists w \, \forall y \, (y \in w \Leftrightarrow \exists x \in z \, \varphi(x, y, \bar{u})) \right).$$

  Zapis $\exists^{=1} y$ oznacza "istnieje dokładnie jedno y", co można wyrazić za pomocą zwykłych kwantyfikatorów $\exists$ i $\forall$ oraz równości.
- aksjomat ufundowania $\forall x \; (x \neq \varnothing \Rightarrow \exists y \in x \, (x \cap y = \varnothing))$
- aksjomat wyboru.

8. Arytmetyka Peano PA to teoria w sygnaturze $\{\leqslant, +, \cdot, 0, 1\}$, aksjomatyzująca klasę modeli PA (a w zamierzeniu aksjomatyzująca własności struktury $(\mathbb{N}, +, \cdot, \leqslant, 0, 1)$). Aksjomaty:
- aksjomaty części nieujemnej pierścienia dyskretnie uporządkowanego
- schemat indukcji: dla każdej formuły $\varphi(x, \bar{y})$ aksjomatem PA jest

$$\forall \bar{y} \, (\varphi(0, \bar{y}) \wedge \forall x \, (\varphi(x, \bar{y}) \Rightarrow \varphi(x+1, \bar{y}) \Rightarrow \forall x \, \varphi(x, \bar{y}))\,.$$

Uwaga. Z dokładnością do odpowiednich tłumaczeń między językami $\{\in\}$ i $\{\leqslant, +, \cdot, 0, 1\}$ teorię PA można utożsamić z ZFC z aksjomatem nieskończoności zastąpionym jego negacją (ściśle rzecz biorąc, uprzednio należy dopisać do aksjomatyki ZFC tzw. aksjomat $\in$-indukcji, który wynika z ZFC, ale już nie z ZFC pozbawionego aksjomatu nieskończoności).

9. Dla dowolnej struktury $\mathbf{A}$, *teoria struktury* $\mathbf{A}$ to $\mathrm{Th}(\mathbf{A}) = \{\varphi \colon \mathbf{A} \models \varphi\}$.

Definicja 3.3.3. jeśli $\mathbf{B}$ jest tej samej sygnatury co $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B} \models \mathrm{Th}(\mathbf{A})$, to mówimy, że $\mathbf{B}$ jest *elementarnie równoważna* $\mathbf{A}$ (piszemy $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$)

Uwaga. $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego φ: $\mathbf{A} \models \varphi$ wtw $\mathbf{B} \models \varphi$.

Uwaga. Każda klasa aksjomatyzowalna musi być domknięta na elementarną równoważność.

Uwaga. Struktury izomorficzne są elementarnie równoważne.

Z powyższego wynika, że żadna klasa, która nie jest domknięta na izomorfizm, nie jest aksjomatyzowalna. Dowodzenie nieaksjomatyzowalności klas domkniętych na izomorfizm będzie wymagało wprowadzenia nowych metod. Stosunkowo prosto jest pokazać, że pewnych klas nie da się zaksjomatyzować teoriami złożonymi z bardzo prostych zdań.

Definicja 3.3.4. Formuła φ jest *czysto egzystencjalna*, jeśli jest postaci $\exists x_1 \ldots \exists x_n \, \psi$, gdzie ψ bezkwantyfikatorowa.
Formuła φ jest *czysto uniwersalna*, jeśli jest postaci $\forall x_1, \ldots \forall x_n \, \psi$, gdzie ψ bezkwantyfikatorowa.

Stwierdzenie 3.3.5. *Niech $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ i $\bar{a} \in A$. Jeśli $\varphi(\bar{x})$ jest czysto egzystencjalna i $\mathbf{A} \models \varphi[\bar{a}]$, to $\mathbf{B} \models \varphi[\bar{a}]$. Jeśli $\varphi(\bar{x})$ jest czysto uniwersalna, $\bar{a} \in A$ i $\mathbf{B} \models \varphi[\bar{d}]$, to $\mathbf{A} \models \varphi[\bar{a}]$.*

Dowód. Zauważmy najpierw, że na mocy definicji podstruktury i definicji spełniania formuł bezkwantyfikatorowych, dla dowolnych $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$, dowolnej ψ bezkwantyfikatorowej, dowolnej krotki $\bar{a} \in A$ mamy: $\mathbf{A} \models \psi[\bar{a}]$ wtedy i tylko wtedy gdy $\mathbf{B} \models \psi[\bar{a}]$

Niech teraz φ będzie czysto egzystencjalną formułą postaci $\exists y_1 \ldots \exists y_n\, \psi(\bar{x}, \bar{y})$, gdzie ψ nie zawiera kwantyfikatorów. Jeśli $\mathbf{A} \models \varphi[\bar{a}]$ to istnieją $b_1, \ldots, b_n \in A$ takie, że $\mathbf{A} \models \psi[\bar{a}, \bar{b}]$. Skoro ψ jest bezkwantyfikatorowa, to dla tych właśnie $b_1, \ldots, b_k$ mamy $\mathbf{B} \models \psi[\bar{a}, \bar{b}]$. A zatem $\mathbf{B} \models \exists y_1 \ldots \exists y_n\, \psi[\bar{a}, \bar{y}]$, czyli $\mathbf{B} \models \varphi[\bar{a}]$.
Dla φ czysto uniwersalnej korzystamy z tego, że $\mathbf{A} \not\models \forall y_1 \ldots \forall y_n\, \psi[\bar{a}]$ wtw $\mathbf{A} \models \forall y_1 \ldots \forall y_n\, \neg\psi[\bar{a}]$. $\square$

Przykład. Klasa liniowych porządków ma, jak łatwo sprawdzić, czysto uniwersalną aksjomatyzację. W aksjomatyce gęstych liniowych porządków pojawia się natomiast zdanie, które nie jest czysto uniwersalne: $\forall x\, \forall y\, (x \prec y \Rightarrow \exists z\, (x \prec z \wedge z \prec y))$. Nie jest to przypadek: ponieważ $(\mathbb{Q}, \leqslant)$ jest gęstym porządkiem, a jego podstruktura $(\mathbb{N}, \leqslant)$ nie jest, to klasa gęstych liniowych porządków nie może mieć czysto uniwersalnej aksjomatyzacji.

Innymi metodami w tym stylu można dowodzić, że jakaś klasa struktur nie ma aksjomatyki złożonej z nieco bardziej skomplikowanych, ale wciąż prostych zdań, np. postaci $\forall x_1 \ldots \forall x_n\, \exists y_1 \ldots \exists y_m\, \psi$ bądź $\exists x_1 \ldots \exists x_n\, \forall y_1 \ldots \forall y_m\, \psi$ dla ψ bezkwantyfikatorowej. W celu dowodzenia, że pewne klasy w ogóle nie są aksjomatyzowalne, wprowadzimy teraz nową konstrukcję struktur.

3.4. Ultraprodukty

Definicja 3.4.1. Niech $\{\mathbf{A}_i : i \in I\}$ będzie indeksowaną rodziną struktur sygnatury σ. Niech $\mathcal{U}$ będzie ultrafiltrem[2] na zbiorze indeksów I. *Ultraprodukt* $\prod_{i \in I} \mathbf{A}_i/_{\mathcal{U}}$ to struktura sygnatury σ zdefiniowana w następujący sposób.

- Dla $(a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i$ definiujemy: $(a_i)_{i \in I} \sim_{\mathcal{U}} (b_i)_{i \in I}$, jeśli $\{i \in I \colon a_i = b_i\} \in \mathcal{U}$. Z definicji ultrafiltru wynika, że $\sim_{\mathcal{U}}$ jest relacją równoważności.
- Uniwersum $\prod_{i \in I} \mathbf{A}_i/_{\mathcal{U}}$ to zbiór klas abstrakcji relacji $\sim_{\mathcal{U}}$ (czyli $\prod_{i \in I} A_i/_{\sim_{\mathcal{U}}}$).
- Dla $R^n \in \sigma$: $([(a_i^1)_i], \ldots, [(a_i^n)_i]) \in R^{\prod_i \mathbf{A}_i/\mathcal{U}}$ wtw $\{i \in I \colon (a_i^1, \ldots, a_i^n) \in R^{\mathbf{A}_i}\} \in \mathcal{U}$.
  (To jest dobrze określone: jeśli $(a_i^1) \sim_{\mathcal{U}} (b_i^1), \ldots, (a_i^n) \sim_{\mathcal{U}} (b_i^n)$, to dla każdego $j = 1, \ldots, n$, $Z_j := \left\{i \colon a_i^j = b_i^j\right\} \in \mathcal{U}$ jest elementem $\mathcal{U}$. Jeśli również $X := \{i \colon (a_i^1, \ldots, a_i^n) \in R^{\mathbf{A}_i}\} \in \mathcal{U}$, to $\mathcal{U} \ni Z_1 \cap \cdots \cap Z_n \cap X \subseteq \{i \colon (b_i^1, \ldots, b_i^n) \in R^{\mathbf{A}_i}\}$, więc $\{i \colon (b_i^1, \ldots, b_i^n) \in R^{\mathbf{A}_i}\} \in \mathcal{U}$.)
- Dla $f^n \in \sigma$: $f^{\prod_i \mathbf{A}_i/\mathcal{U}}([(a_i^1)_i], \ldots, [(a_i^n)_i]) = [(f^{\mathbf{A}_i}(a_i^1, \ldots, a_i^n))_i]$.
  (Poprawność definicji sprawdza się podobnie jak dla symboli relacyjnych.)
- Dla $c \in \sigma$: $c^{\prod_i \mathbf{A}_i/\mathcal{U}} = [(c^{\mathbf{A}_i})_i]$.

Definicja 3.4.2. Jeśli dla każdego $i \in I$ mamy $\mathbf{A}_i = \mathbf{A}$, to ultraprodukt $\prod_{i \in I} \mathbf{A}/_{\mathcal{U}}$ nazywamy ultrapotęgą i oznaczamy przez $\mathbf{A}^I/_{\mathcal{U}}$

Przykład.

1. Jeśli $\mathcal{U}$ jest ultrafiltrem głównym generowanym przez $\{i_0\}$, gdzie $i_0 \in I$, to $\prod_{i \in I} \mathbf{A}_i/_{\mathcal{U}} \simeq A_{i_0}$.

[2] Definicja na ćwiczeniach.

2. Weźmy $\mathcal{U}$ ultrafiltr niegłówny na $\mathbb{N}$. Popatrzmy na ${(\mathbb{N},\leqslant)^{\mathbb{N}}}/{\mathcal{U}}$. Przekształcenie zadane wzorem $\mathbb{N} \ni n \mapsto [(n,n,n,n,\dots)]$ jest zanurzeniem $(\mathbb{N},\leqslant)$ w ${(\mathbb{N},\leqslant)^{\mathbb{N}}}/{\mathcal{U}}$. Rozważmy jednak element $[(0,1,2,3,4,\dots)]$. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $[(n,n,n,n,\dots)] \leqslant [(0,1,2,3,4,\dots)]$, gdyż koskończony zbiór $\{k \in \mathbb{N} \colon n \leqslant k\}$ musi być elementem $\mathcal{U}$. W takim razie w ${(\mathbb{N},\leqslant)^{\mathbb{N}}}/{\mathcal{U}}$ istnieje element, poniżej którego jest nieskończenie wiele elementów, czyli ${(\mathbb{N},\leqslant)^{\mathbb{N}}}/{\mathcal{U}}$ nie jest izomorficzne z $(\mathbb{N},\leqslant)$.

Twierdzenie 3.4.3 (Łosia)**.** *Dla dowolnej formuły $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ i krotki $([(a_i^1)_i],\dots,[(a_i^n)_i])$ elementów ${\prod_i A_i}/{\mathcal{U}}$ zachodzi:*

$$\prod_i \mathbf{A}_i \Big/ \mathcal{U} \models \varphi\left[[(a_i^1)_{i\in I}],\dots,[a_i^n]_{i\in I}\right] \text{ wtw } \left\{i \colon \mathbf{A}_i \models \varphi[a_i^1,\dots,a_i^n]\right\} \in \mathcal{U}$$

Dowód. Przez indukcję po budowie formuły. Wystarczy sprawdzić kroki dla formuł atomowych, $\neg, \vee$ i $\exists$

- W kroku atomowym potrzebny jest odrębny (prosty) dowód przez indukcję po budowie termu, że dla dowolnego termu $t(x_1,\dots,x_n)$ i dowolnych $[(a_i^1)_i],\dots,[(a_i^n)_i]$ zachodzi

$$t^{\prod_i \mathbf{A}_i/\mathcal{U}}\left[[(a_i^1)_i],\dots,[(a_i^n)_i]\right] = \left[\left(t^{\mathbf{A}_i}[a_i^1,\dots,a_i^n]\right)_i\right]$$

(wszystkie kroki łatwo wynikają z definicji ultraproduktu).

- Niech φ będzie postaci $t_1 = t_2$.

$$\begin{aligned}
& \prod_i \mathbf{A}_i \Big/ \mathcal{U} \models t_1 = t_2 \left[[(a_i^1)_i],\dots,[(a_i^n)_i]\right] \\
\text{wtw}\quad & t_1^{\prod_i \mathbf{A}_i/\mathcal{U}}\left[[(a_i^1)_i],\dots,[(a_i^n)_i]\right] = t_2^{\prod_i \mathbf{A}_i/\mathcal{U}}\left[[(a_i^1)_i],\dots,[(a_i^n)_i]\right] \\
\text{wtw}\quad & \left(t_1^{\mathbf{A}_i}[a_i^1,\dots,a_i^n]\right)_i \sim_{\mathcal{U}} \left(t_2^{\mathbf{A}_i}[a_i^1,\dots,a_i^n]\right)_i \\
\text{wtw}\quad & \left\{i \colon t_1^{\mathbf{A}_i}[a_i^1,\dots,a_i^n] = t_2^{\mathbf{A}_i}[a_i^1,\dots,a_i^n]\right\} \in \mathcal{U} \\
\text{wtw}\quad & \left\{i \colon \mathbf{A}_i \models t_1 = t_2\,[a_i^1,\dots,a_i^n]\right\} \in \mathcal{U}.
\end{aligned}$$

- Niech φ będzie postaci $R(t_1,\dots,t_k)$. Dla uproszczenia przyjmujemy $k=1$ i piszemy $t := t_1$.

$$\begin{aligned}
& \prod_i \mathbf{A}_i \Big/ \mathcal{U} \models R(t)\left[[(a_i^1)_i],\dots,[(a_i^n)_i]\right] \\
\text{wtw}\quad & t^{\prod_i \mathbf{A}_i/\mathcal{U}}\left[[(a_i^1)_i],\dots,[(a_i^n)_i]\right] \in R^{\prod_i \mathbf{A}_i/\mathcal{U}} \\
\text{wtw}\quad & \left[\left(t^{\mathbf{A}_i}[a_i^1,\dots,a_i^n]\right)_i\right] \in R^{\prod_i \mathbf{A}_i/\mathcal{U}} \\
\text{wtw}\quad & \left\{i \colon t^{\mathbf{A}_i}[a_i^1,\dots,a_i^n] \in R^{\mathbf{A}_i}\right\} \in \mathcal{U} \\
\text{wtw}\quad & \left\{i \colon \mathbf{A}_i \models R(t(a_i^1,\dots,a_i^n))\right\} \in \mathcal{U}.
\end{aligned}$$

- Niech φ będzie postaci $\neg\psi$.

$$\begin{aligned}&\textstyle\prod_i \mathbf{A}_i/\mathcal{U} \models \neg\psi \text{ wtw } \prod_i \mathbf{A}_i/\mathcal{U} \not\models \psi \overset{\text{(zał. ind.)}}{\text{wtw}}\\ &\{i\colon \mathbf{A}_i \models \psi\} \notin \mathcal{U} \text{ wtw } \{i\colon \mathbf{A}_i \models \neg\psi\} \in \mathcal{U}.\end{aligned}$$

Ostatnia równoważność wynika z tego, że dla dowolnego $X \subseteq I$ mamy: $X \notin \mathcal{U}$ wtw $I \setminus X \in \mathcal{U}$.

- Niech φ będzie postaci postaci $\psi \vee \eta$.

$$\begin{aligned}&\textstyle\prod_i \mathbf{A}_i/\mathcal{U} \models \psi \vee \eta \text{ wtw } \left(\prod_i \mathbf{A}_i/\mathcal{U} \models \psi \text{ lub } \prod_i \mathbf{A}_i/\mathcal{U} \models \eta\right) \text{ wtw}\\ &(\{i\colon \mathbf{A}_i \models \psi\} \in \mathcal{U} \text{ lub } \{i\colon \mathbf{A}_i \models \eta\} \in \mathcal{U}) \text{ wtw}\\ &\{i : \mathbf{A}_i \models \psi\} \cup \{i : \mathbf{A}_i \models \eta\} \in \mathcal{U} \text{ wtw } \{i : \mathbf{A}_i \models \psi \vee \eta\} \in \mathcal{U}.\end{aligned}$$

Przedostatnia równoważność wynika z tego, że dla dowolnych $X, Y \subseteq I$ mamy: $X \cup Y \in \mathcal{U}$ wtw ($X \in \mathcal{U}$ lub $Y \in \mathcal{U}$).

- Niech φ będzie postaci $\exists y\psi(y, x_1, \ldots, x_n)$.

Jeśli

$$\textstyle\prod_i \mathbf{A}_i/\mathcal{U} \models \exists y\, \psi\, [[(a_i^1)_i], \ldots, [(a_i^n)_i]]\,,$$

to istnieje $(b_i)_{i\in I}$ taki, że

$$\textstyle\prod_i \mathbf{A}_i/\mathcal{U} \models \psi\, [[(b_i)_i]/y, [(a_i^1)_i]/x_1, \ldots, [(a_i^n)_i]/x_n.]$$

Z założenia indukcyjnego,

$$X := \left\{i\colon \mathbf{A}_i \models \psi\, [b_i/y, a_i^1/x_1, \ldots, a_i^n/x_n]\right\} \in \mathcal{U}.$$

Zauważmy, że $X \subseteq Y := \{i\colon \mathbf{A}_i \models \exists y\, \psi\, [a_i^1/x_1, \ldots, a_i^n/x_n]\}$, zatem również $Y \in \mathcal{U}$.
W drugą stronę, załóżmy, że $Y \in \mathcal{U}$. Dla $i \in Y$ wybierzmy takie $d_i \in A_i$, że

$$\mathbf{A}_i \models \psi\, [d_i/y, a_i^1/x_1, \ldots, a_i^n/x_n].$$

Definiujemy teraz $(b_i)_i$:

$$b_i = \begin{cases} d_i & \text{jeśli } i \in Y\\ \text{jakikolwiek element } A_i & \text{wpp}\end{cases}$$

Mamy $\{i\colon \mathbf{A}_i \models \psi\, [b_i/y, a_i^1/x_1, \ldots, a_i^n/x_n]\} \in \mathcal{U}$. Z założenia indukcyjnego wnioskujemy, że $\prod_i \mathbf{A}_i/\mathcal{U} \models \psi\, [[(b_i)_i], [(a_i^1)_i], \ldots, [(a_i^n)_i]]$, czyli $\prod_i \mathbf{A}_i/\mathcal{U} \models \exists y\, \psi\, [[(a_i^1)_i], \ldots, [(a_i^n)_i]]$.

$\square$

Wniosek 3.4.4. $\mathbf{A}^I/\mathcal{U} \equiv \mathbf{A}$. *W szczególności,* $(\mathbb{N}, \leqslant)^{\mathbb{N}}/\mathcal{U} \equiv \mathbb{N}$.

Dowód. $\mathbf{A}^I/\mathcal{U} \models \varphi$ wtw $\{i\colon \mathbf{A} \models \varphi\} \in \mathcal{U}$ wtw $\mathbf{A} \models \varphi$. $\square$

Wniosek 3.4.5. *Następujące klasy struktur nie są aksjomatyzowalne:*

(i) klasa struktur o skończonym uniwersum (dowolnej ustalonej sygnatury),
(ii) klasa dobrych porządków,
(iii) klasa ciał niezerowej charakterystyki.

Dowód. Dowody wszystkich trzech części twierdzenia są podobne.

(i) Załóżmy, że teoria T aksjomatyzuje klasę struktur skończonych. Dla $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, niech $\mathbf{A}_n$ ma dokładnie n elementów. Rozważmy niegłówny ultrafiltr $\mathcal{U}$ na $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ i ultraprodukt $\prod_n \mathbf{A}_n/\mathcal{U}$. Mamy $\prod_n \mathbf{A}_n/\mathcal{U} \models T$, bo $\mathbf{A}_n \models T$ dla każdego n.
Z drugiej strony, dla danego $k \in \mathbb{N}$ rozważmy zdanie φ_k mówiące „istnieje $\geqslant k$ elementów". Mamy $\{n : \mathbf{A}_n \models \varphi_k\} = \{k, k+1, \ldots\}$, a ten zbiór należy do $\mathcal{U}$, gdyż $\mathcal{U}$ jest niegłówny. Na mocy twierdzenia Łosia, $\prod_n \mathbf{A}_n/\mathcal{U} \models \varphi_k$. Z dowolności k wnioskujemy, że $\prod_n \mathbf{A}_n/\mathcal{U}$ ma nieskończone uniwersum, wbrew naszemu założeniu na temat T. $\lightning$

(ii) Załóżmy, że T aksjomatyzuje klasę dobrych porządków. Niech $\mathbf{A}_n$ będzie zwykłym porządkiem na zbiorze $\{-n, -n+1, \ldots, 0\}$ i niech $\mathcal{U}$ będzie ultrafiltrem niegłównym na $\mathbb{N}$. Mamy $\prod_n \mathbf{A}_n/\mathcal{U} \models T$, bo $\mathbf{A}_n \models T$ dla każdego n. W $\prod_n \mathbf{A}_n/\mathcal{U}$ możemy jednak rozważyć elementy $a^k = [(0, 1, -2, \ldots, -k, -k, -k, \ldots)]$. Łatwo sprawdzić, że $\langle a^k : k \in \mathbb{N} \rangle$ jest nieskończonym ciągiem ściśle malejącym. $\lightning$

(iii) Załóżmy, że T aksjomatyzuje klasę ciał charakterystyki niezerowej. Niech $\mathbb{P}$ oznacza zbiór liczb pierwszych i niech $\mathcal{U}$ będzie ultrafiltrem niegłównym na $\mathbb{P}$. Wtedy $\prod_{p \in \mathbb{P}} \mathbb{F}_p/\mathcal{U} \models T$, bo $\mathbb{F}_p \models T$ dla każdego $p \in \mathbb{P}$. Dla dowolnego $q \in \mathbb{P}$ mamy jednak

$$\left\{ p \in \mathbb{P} : \mathbb{F}_p \models \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{q} = 0 \right\} = \{q\} \notin \mathcal{U},$$

czyli $\prod_p \mathbb{F}_p/\mathcal{U} \not\models \underbrace{1 + \cdots + 1}_{q}$. Z dowolności q wnioskujemy, że $\prod_p \mathbb{F}_p/\mathcal{U}$ nie jest ciałem niezerowej charakterystyki. $\lightning$

$\square$

Wniosek 3.4.6. *Klasa struktur nieskończonych i klasa ciał charakterystyki 0 nie są skończenie aksjomatyzowalne.*

Dowód. Jeśli φ jest jednozdaniową aksjomatyką dla ciał charakterystyki 0, a ψ jest koniunkcją zwykłych aksjomatów ciał, to $\psi \wedge \neg\varphi$ jest aksjomatyką dla ciał niezerowej charakterystyki. $\lightning$ Dla struktur skończonych rozumowanie jest podobne, ale jeszcze prostsze. $\square$

3.5. Dygresja: dwie szczególne ultrapotęgi

Definicja 3.5.1. *Niestandardowy model arytmetyki* to dowolna struktura $\mathbf{A}$ sygnatury

$$(\leqslant, +, \cdot, 0, 1, \text{ewentualnie coś jeszcze})$$

taka, że $\mathbf{A} \equiv (\mathbb{N}, +, \cdot, \leqslant, 0, 1, \dots)$ ale $\mathbf{A} \not\cong (\mathbb{N}, \dots)$

Uwaga. „Ewentualnie coś jeszcze” może obejmować na przykład funkcję 2^x, która umożliwia wygodne reprezentowanie skończonych ciągów liczb naturalnych za pomocą pojedynczych liczb naturalnych, funkcję $x!$, relację „y jest x-tą liczbą pierwszą” itp. Skądinąd jednak wiadomo (jest to nietrywialny wynik Kurta Gödla), że wszystkie te funkcje i relacje, jak również niemal wszystkie inne relacje teorioliczbowe, które mogą przyjść do głowy niespecjaliście, są definiowalne w $(\mathbb{N}, +, \cdot)$!

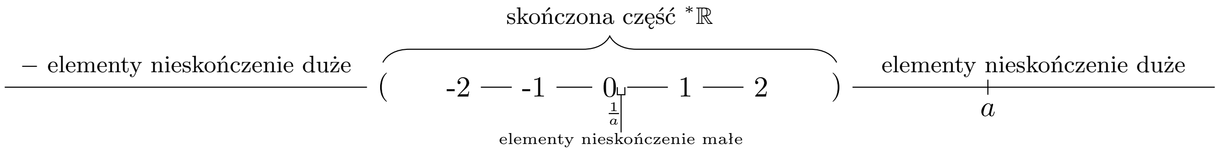
Przykład. ${(\mathbb{N}, \dots)^{\mathbb{N}}}/{\mathcal{U}}$, dla $\mathcal{U}$ niegłównego, jest niestandardowym modelem arytmetyki.

Każdy model niestandardowy musi mieć postać:

$$\overbrace{0^{\mathbf{A}}, 1^{\mathbf{A}}, \underset{=2^{\mathbf{A}}}{(1+1)^{\mathbf{A}}}, 3^{\mathbf{A}}, \dots}^{\text{izmorficzna kopia } \mathbb{N}} \quad \underbrace{(\dots, \overset{b+\mathbb{Z}}{b}, \dots),\ ,(\dots, \lfloor \frac{a+b}{2} \rfloor, \dots),\ ,(\dots, \overset{a+\mathbb{Z}}{a}, \dots), \dots, 2a, \dots, a^2, \dots, 2^a, \dots}_{\text{część niestandardowa struktury}}$$

Modele niestandardowe przydają się w dowodzeniu, że jakieś twierdzenia nie wynikają z aksjomatów Arytmetyki Peano albo innych silnych fragmentów $\mathrm{Th}(\mathbb{N}, \leqslant, +, \cdot, 0, 1)$. Przykładowo, jeśli $\mathbb{A}$ jest modelem niestandardowym, to odpowiednio wybrany odcinek początkowy $\mathbf{A}$ może spełniać PA, ale nie spełniać zdań wyrażających pewne (dość wyrafinowane) własności teorioliczbowe czy kombinatoryczne $\mathbb{N}$.

Przykład. Rozważmy teraz sygnaturę $(\leqslant, +, \cdot, 0, 1, \text{ewentualnie coś jeszcze})$, gdzie „coś jeszcze” obejmuje teraz operacje i relacje na liczbach rzeczywistych, np. $\sin, \cos, e^x$, funkcję Γ itd., a może nawet wszystkie operacje i relacje na $\mathbb{R}$. Struktura ${}^*\mathbb{R} = {(\mathbb{R}, +, \cdot, \leqslant, 0, 1 \dots)^{\mathbb{N}}}/{\mathcal{U}}$, gdzie $\mathcal{U}$ niegłówny, ma kształt:



${}^*\mathbb{R}$ nazywa się niekiedy strukturą *liczb hiperrzeczywistych.* Klasy abstrakcji ciągów $\langle r, r, r, \dots \rangle$ dla $r \in \mathbb{R}$ tworzą podstrukturę ${}^*\mathbb{R}$, którą możemy utożsamić z $\mathbb{R}$. Każdy element skończonej części ${}^*\mathbb{R}$ ma jednoznaczne przedstawienie w postaci ${}^*x = x + \varepsilon$, gdzie $x \in \mathbb{R}$, a ε jest nieskończenie małe. Liczbę x nazywany *częścią standardową* liczby ${}^*x$ i możemy oznaczać przez $\mathrm{st}({}^*x)$.
W ${}^*\mathbb{R}$ możemy uprawiać analizę niestandardową, czyli definiować podstawowe pojęcia analizy za pomocą liczb nieskończenie małych. Na przykład dla funkcji f i $x \in \mathbb{R}$ można zdefiniować

$$f'(x) = \mathrm{st}\left(\frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}\right) \qquad \text{dla } \varepsilon \text{ nieskończenie małego,}$$

jeśli wartość ta jest dobrze określona (tj. jeśli iloraz różnicowy jest skończony i jego część standardowa nie zależy od wyboru ε), co będzie miało miejsce, ilekroć f jest różniczkowalna w x w „tradycyjnym” sensie.

3.6. Twierdzenie o zwartości i charakteryzacja klas aksjomatyzowalnych

Twierdzenie 3.6.1 (o zwartości dla logiki pierwszego rzędu)**.** *Niech T będzie teorią, a φ — zdaniem logiki pierwszego rzędu. Jeśli $T \models \varphi$, to istnieje skończona teoria $T_0 \subseteq T$ taka, że $T_0 \models \varphi$.*

Dowód. Wystarczy pokazać, że jeśli każdy skończony fragment teorii T ma model, to T ma model. Załóżmy więc, że każdy skończony fragment T ma model, i niech I będzie rodziną wszystkich skończonych fragmentów T. Dla każdego $S \in I$ wybierzmy strukturę $\mathbf{A}_S \models S$.
Dla każdego zdania $\psi \in T$ niech $X_\psi = \{S \in I : \psi \in S\}$. Zauważmy, że jeśli $S \in X_\psi$, to $\mathbf{A}_S \models \psi$.
Rodzina $\{X_\psi : \psi \in T\}$ ma własność skończonych przecięć. (Dla danych $\psi_1, \ldots, \psi_n \in T$ mamy $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \subseteq T$, czyli $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \in X_{\psi_1} \cap \cdots \cap X_{\psi_n}$.) W takim razie możemy rozszerzyć ją do ultrafiltru $\mathcal{U}$ na I (ćwiczenia).
Rozważmy $\prod_{S \in I} \mathbf{A}_S/_{\mathcal{U}}$. Dla $\psi \in T$ mamy $\{S \in I : \mathbf{A}_S \models \psi\} \supseteq X_\psi \in \mathcal{U}$, a zatem z twierdzenia Łosia $\prod_i \mathbf{A}_i/_{\mathcal{U}} \models \psi$. Z dowolności ψ wnioskujemy, że $\prod_{S \in I} \mathbf{A}_S/_{\mathcal{U}} \models T$. □

Twierdzenie 3.6.2 (Frayne-Morel-Scott)**.** *Niech $\mathcal{K}$ klasa struktur ustalonej sygnatury. Wtedy $\mathcal{K}$ aksjomatyzowalna wtedy i tylko wtedy gdy $\mathcal{K}$ domknięta na elementarną równoważność i ultraprodukty.*

Dowód.
($\Rightarrow$) natychmiastowy wniosek z definicji elementarnej równoważności i twierdzenia Łosia.
($\Leftarrow$) Załóżmy, że $\mathcal{U}$ jest domknięta na $\equiv$ i ultraprodukty. Zdefiniujmy:

$$T := \{\psi : \text{dla każdej } \mathbf{A} \in \mathcal{K} \text{ zachodzi } \mathbf{A} \models \psi\}\,.$$

Pokażemy, że T aksjomatyzuje $\mathcal{K}$. Oczywiście każda struktura $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$ spełnia T, więc wystarczy sprawdzić, że jeśli $\mathbf{B} \models T$, to $\mathbf{B} \in \mathcal{K}$.
Rozważmy $\mathbf{B} \models T$. Niech I będzie zbiorem wszystkich skończonych fragmentów $\mathrm{Th}(\mathbf{B})$. Dla każdego $S \in I$ wybierzmy $\mathbf{A}_S \in \mathcal{K}$ takie, że $\mathbf{A}_S \models S$. Jakieś takie $\mathbf{A}_S$ istnieje, bo w przeciwnym przypadku dla $S = \{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ mielibyśmy $\mathbf{B} \models \bigwedge_{i \leqslant n} \psi_i$, ale $\mathbf{A} \models \neg \bigwedge_{i \leqslant n} \psi_i$ dla każdego $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$, czyli $\neg \bigwedge_{i \leqslant n} \psi_i \in T$, wbrew założeniu, że $\mathbf{B} \models T$.
Podobnie jak poprzednio definiujemy $X_\psi = \{S \in I : \psi \in S\}$ i sprawdzamy, że $\{X_\psi : \psi \in \mathrm{Th}(\mathbf{B})\}$ ma własność skończonych przecięć, więc istnieje ultrafiltr $\mathcal{U} \supseteq \{X_\psi : \psi \in \mathrm{Th}(\mathbf{B})\}$. Na mocy tw. Łosia, $\prod_{S \in I} \mathbf{A}_S/_{\mathcal{U}} \models \mathrm{Th}(\mathbf{B})$. Z domknięcia $\mathcal{K}$ ultraprodukty wnioskujemy, że $\prod_{S \in I} \mathbf{A}_S/_{\mathcal{U}} \in \mathcal{K}$. Ponadto $\prod_{S \in I} \mathbf{A}_S/_{\mathcal{U}} \equiv \mathbf{B}$, więc $\mathbf{B} \in \mathcal{K}$. □

3.7. Moce struktur w klasach aksjomatyzowalnych. Twierdzenia Löwenheima-Skolema

Zajmiemy się teraz pytaniem, jakiej mocy mogą być struktury należące do danej klasy aksjomatyzowalnej. Zaczynamy od obserwacji, że struktury skończone można scharakteryzować jednym zdaniem z dokładnością do izomorfizmu.

Stwierdzenie 3.7.1. *Niech* $\mathbf{A}$ *będzie skończoną strukturą skończonej sygnatury* σ*. Wtedy istnieje zdanie* $\varphi_{\mathbf{A}}$ *takie, że dla każdej struktury* $\mathbf{B}$ *sygnatury* σ*,* $\mathbf{B} \models \varphi_{\mathbf{A}}$ *wtw* $\mathbf{B}$ *jest izomorficzna z* $\mathbf{A}$*.*

Dowód. Jeśli A ma n elementów, to $\varphi_{\mathbf{A}}$ stwierdza, że istnieją parami różne $x_1, \ldots, x_n$, poza którymi nie ma żadnych innych elementów, a ponadto relacje między $x_1, \ldots, x_n$ oraz wartości funkcji na $x_1, \ldots, x_n$ są dokładnie takie jak w $\mathbf{A}$. □

Tak więc, istnieją klasy aksjomatyzowalne zawierające tylko struktury ustalonej skończonej mocy. Z drugiej strony, używając twierdzenia o zwartości albo modyfikując nasz wcześniejszy dowód nieaksjomatyzowalności klasy struktur skończonych, łatwo pokazać:

Twierdzenie 3.7.2. *Jeśli teoria* T *ma modele dowolnie dużej skończonej mocy, to ma model nieskończony.*

Skupimy się odtąd właśnie na sytuacji, w której T ma modele nieskończone. W opisaniu tej sytuacji przyda się kilka nowych pojęć.

Notacja. Jeśli $\mathbf{A}$ jest strukturą sygnatury σ, to $\sigma_{\mathbf{A}}$ oznacza sygnaturę $\sigma \cup \{c_a : a \in A\}$ (innymi słowy, $\sigma_{\mathbf{A}}$ rozszerza σ o indywidualne nazwy dla wszystkich elementów A).

Definicja 3.7.3. *Diagram* struktury $\mathbf{A}$ to następująca teoria w sygnaturze $\sigma_{\mathbf{A}}$:

$$\begin{aligned}\mathrm{Diag}(\mathbf{A}) = \{\varphi(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n}) : \varphi &\text{ formuła sygnatury } \sigma, \\ &\varphi \text{ atomowa bądź negacja atomowej i } \mathbf{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]\}.\end{aligned}$$

Diagram elementarny struktury $\mathbf{A}$ to następująca teoria w sygnaturze $\sigma_{\mathbf{A}}$:

$$\mathrm{ElDiag}(\mathbf{A}) = \{\varphi(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n}) : \varphi \text{ formuła sygnatury } \sigma \text{ i } \mathbf{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]\}.$$

Podstawową własność diagramów wyraża następująca:

Obserwacja. Jeśli $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ są strukturami sygnatury σ i $(\mathbf{B}, \langle c_a^{\mathbf{B}} : a \in A\rangle) \models \mathrm{Diag}(\mathbf{A})$, to przekształcenie zadane wzorem $h(a) \mapsto c_a^{\mathbf{B}}$ jest zanurzeniem $\mathbf{A}$ w $\mathbf{B}$. W szczególności $h[\mathbf{A}]$ jest podstrukturą $\mathbf{B}$ izomorficzną $\mathbf{A}$, z dokładnością do izomorfizmu można więc traktować $\mathbf{B}$ jako rozszerzenie $\mathbf{A}$

Uwaga. Jeśli $\mathbf{A}_\sigma$ jest strukturą sygnatury σ, $\mathbf{A}_\tau$ jest strukturą sygnatury τ, gdzie $\sigma \subseteq \tau$, a ponadto $A_\sigma = A_\tau$ i interpretacje wszystkich symboli z σ są identyczne w obu strukturach (tak jak w wypadku $\mathbf{B}$ i $(\mathbf{B}, \langle c_a^{\mathbf{B}} : a \in A\rangle)$ w obserwacji powyżej), to $\mathbf{A}_\tau$ nazywamy *wzbogaceniem* $\mathbf{A}_\sigma$ do sygnatury τ, a $\mathbf{A}_\sigma$ — *reduktem* $\mathbf{A}_\tau$ do σ.

Żeby sformułować podstawową własność diagramów elementarnych, potrzebujemy dodatkowej definicji:

Definicja 3.7.4. Zanurzenie h z $\mathbf{A}$ w $\mathbf{B}$ jest *zanurzeniem elementarnym*, jeśli dla dowolnej formuły $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ i dowolnych $a_1, \ldots, a_n \in A$,

$$\mathbf{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \text{ wtw } \mathbf{B} \models \varphi[h(a_1), \ldots, h(a_n)].$$

Jeśli $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ i identyczność jest zanurzeniem elementarnym $\mathbf{A}$ w $\mathbf{B}$, to piszemy $\mathbf{A} \preccurlyeq \mathbf{B}$ i mówimy, że $\mathbf{A}$ jest *elementarną podstrukturą* $\mathbf{B}$, a $\mathbf{B}$ jest *elementarnym rozszerzeniem* $\mathbf{A}$.

Uwaga. Jeśli $\mathbf{A} \preccurlyeq \mathbf{B}$, to oczywiście $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$, ale samo to, że $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ i $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$, jeszcze nie oznacza, że $\mathbf{A} \preccurlyeq \mathbf{B}$. Przykładowo, niech $\mathbf{A} = (\mathbb{N} \setminus \{0\}, \leqslant)$ i $\mathbf{B} = (\mathbb{N}, \leqslant)$. Wtedy $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \simeq \mathbf{B}$ (funkcja $\varphi : n \mapsto n - 1$ jest izomorfizmem z $\mathbf{A}$ na $\mathbf{B}$), ale $\mathbf{A} \not\preccurlyeq \mathbf{B}$: jeśli $\varphi(x)$ oznacza formułę $\forall y\, x \leqslant y$, to $\mathbf{A} \models \alpha[1]$, ale $\mathbf{B} \not\models \alpha[1]$ (bo $0 < 1$).

Obserwacja. Jeśli $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ są strukturami sygnatury σ i $(\mathbf{B}, \langle c_a^{\mathbf{B}} : a \in A \rangle) \models \mathrm{ElDiag}(\mathbf{A})$, to przekształcenie $a \mapsto c_a^{\mathbf{B}}$ jest zanurzeniem elementarnym $\mathbf{A}$ w $\mathbf{B}$. W szczególności $h[\mathbf{A}] \preccurlyeq \mathbf{B}$, z dokładnością do izomorfizmu można więc traktować $\mathbf{B}$ jako elementarne rozszerzenie $\mathbf{A}$.

Będziemy teraz dowodzić dwu tzw. twierdzeń Löwenheima-Skolema, które łącznie mówią między innymi, że jeśli T ma model nieskończony, to T ma modele dowolnych nieskończonych mocy z ewentualnym wyjątkiem mocy mniejszych niż liczba symboli w sygnaturze T.

Twierdzenie 3.7.5 (górne twierdzenie Löwenheima-Skolema)**.** *Jeśli* $\mathbf{A}$ *jest strukturą nieskończoną, to* $\mathbf{A}$ *ma rozszerzenia elementarne dowolnie dużych mocy.*

Dowód. Niech X będzie dowolnym zbiorem. Pokażemy, że istnieje elementarne rozszerzenie $\mathbf{A}$ o uniwersum mocy co najmniej tak dużej jak moc X.
Niech σ będzie sygnaturą struktury $\mathbf{A}$ i niech $\sigma_{\mathbf{A},X}$ oznacza sygnaturę $\sigma_{\mathbf{A}} \cup \{d_x : x \in X\}$, gdzie d_x są parami różnymi stałymi niewystępującymi w $\sigma_{\mathbf{A}}$. Rozważmy teorię następującą teorię w sygnaturze $\sigma_{\mathbf{A},X}$:

$$T = \mathrm{ElDiag}(\mathbf{A}) \cup \{d_x \neq d_y : x, y \in X, x \neq y\}.$$

Teoria T jest skończenie spełnialna: dowolny fragment T, w którym występują tylko symbole z $\sigma_{\mathbf{A}}$ oraz stałe $d_{x_1}, \ldots, d_{x_n}$, jest spełniony w każdej strukturze o uniwersum A, w której symbole z σ interpretujemy tak jak w $\mathbf{A}$, każdy symbol c_a dla $a \in A$ interpretujemy jako a, a symbole $d_{x_1}, \ldots, d_{x_n}$ interpretujemy jako n parami różnych elementów A (jest to możliwe, bo A jest z założenia zbiorem nieskończonym). Na mocy twierdzenia o zwartości T jest więc spełnialna.
Niech $\mathbf{B}$ będzie modelem T. Na mocy podstawowej własności diagramów elementarnych, redukt $\mathbf{B}$ do sygnatury σ jest z dokładnością do izomorfizmu elementarnym rozszerzeniem $\mathbf{A}$. Z drugiej strony, z definicji T wynika, że $d_x^{\mathbf{B}} \neq d_y^{\mathbf{B}}$ dla $x, y \in X, x \neq y$, a zatem $|B| \geqslant |X|$. □

Twierdzenie 3.7.6 (kryterium Tarskiego-Vaughta)**.** *Niech* $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$*. Wtedy* $\mathbf{A} \preccurlyeq \mathbf{B}$ *wtw dla każdej formuły* $\psi(x_1, \ldots, x_n, y)$ *oraz dowolnych* $a_1, \ldots, a_n \in A$*, jeśli* $\mathbf{B} \models \exists y \psi\, [a_1, \ldots, a_n]$*, to istnieje* $a \in A$ *t. że* $\mathbf{B} \models \psi[a_1, \ldots, a_n, a]$.

Dowód. ($\Rightarrow$) Rozważmy formułę $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ postaci $\exists y\, \psi(x_1, \dots, x_n, y)$. Jeśli $\mathbf{B} \models \varphi[\bar{a}]$, to na mocy $\mathbf{A} \preccurlyeq \mathbf{B}$ również $\mathbf{A} \models \varphi[\bar{a}]$. Z definicji spełniania wynika, że istnieje $a \in A$ takie, że $\mathbf{A} \models \psi[\bar{a}, a]$. Ponownie na mocy $\mathbf{A} \preccurlyeq \mathbf{B}$ wnioskujemy, że $\mathbf{B} \models \psi[a, \bar{a}]$.
($\Leftarrow$) Przez indukcję po budowie formuły pokazujemy, że dla dowolnej formuły $\varphi(\bar{x})$ i krotki $\bar{a}$ elementów A mamy

$$\mathbf{A} \models \varphi[\bar{a}] \text{ wtw } \mathbf{B} \models \varphi[\bar{a}].$$

1. Krok dla φ atomowej wynika natychmiast z tego, że $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$.
2. Kroki dla spójników zdaniowych są bezproblemowe.
3. Krok dla $\exists$: niech $\varphi(\bar{x})$ będzie postaci $\exists y\, \psi(\bar{x}, y)$. Jeśli $\mathbf{A} \models \varphi[\bar{a}]$, to jest $a \in A$ takie, że $\mathbf{A} \models \psi[\bar{a}, a]$. Z założenia indukcyjnego $\mathbf{B} \models \psi[\bar{a}, a]$, czyli również $\mathbf{B} \models \varphi[\bar{a}]$. W drugą stronę, jeśli $\mathbf{B} \models \varphi[\bar{a}]$, to na mocy założenia istnieje $a \in A$ spełniające $\mathbf{B} \models \psi[\bar{a}, a]$. Z założenia indukcyjnego $\mathbf{A} \models \psi[\bar{a}, a]$, czyli również $\mathbf{A} \models \varphi[\bar{a}]$.

□

Fakt 3.7.7. *Niech X będzie zbiorem nieskończonym. Wtedy:*

1. $|X \times X| = |X|$
2. *Suma co najwyżej przeliczalnie wielu zbiorów mocy* $\leqslant |X|$ *jest mocy* $\leqslant |X|$.

Dowód. 1. To twierdzenie Hessenberga z teorii mnogości.
2. $|\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n| \leqslant |\mathbb{N} \times X| \leqslant |X \times X| = |X|$.

□

Wniosek 3.7.8. *Niech $\sigma = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ będzie sygnaturą. Niech $|\sigma| := |\mathcal{R} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{C}|$ Wtedy formuł sygnatury σ jest* $\max(\aleph_0, |\sigma|)$

Dowód. Każda formuła jest skończonym ciągiem symboli ze zbioru

$$X = \mathcal{R} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{C} \cup \underbrace{\{(,), \neg, \vee, \exists, x_0, x_1, \dots\}}_{\text{przeliczalny}},$$

który jest mocy $\max(|\sigma|, \aleph_0)$, czyli elementem zbioru X^n dla pewnego $n \in \mathbb{N}$. Na mocy faktu 3.7.7 wszystkich formuł sygnatury σ jest nie więcej $\max(|\sigma|, \aleph_0)$. Druga nierówność jest prostym ćwiczeniem. □

Twierdzenie 3.7.9 (dolne twierdzenie Löwenheima-Skolema)**.** *Niech $\mathbf{A}$ będzie nieskończoną strukturą sygnatury σ. Niech $X \subseteq A$. Wtedy istnieje $\mathbf{B} \preccurlyeq \mathbf{A}$ takie, że $X \subseteq B$, a $|B| \leqslant$* $\max(|\sigma|, |X|, \aleph_0)$.

Dowód. Dla każdej formuły postaci $\exists y\, \psi(\bar{x}, y)$ wprowadźmy operację $f_{\exists y \psi} \colon A^{\mathrm{lh}(\bar{x})} \to A$, która dla dowolnej krotki $\bar{a} \in A^{lh(\bar{x})}$ spełnia

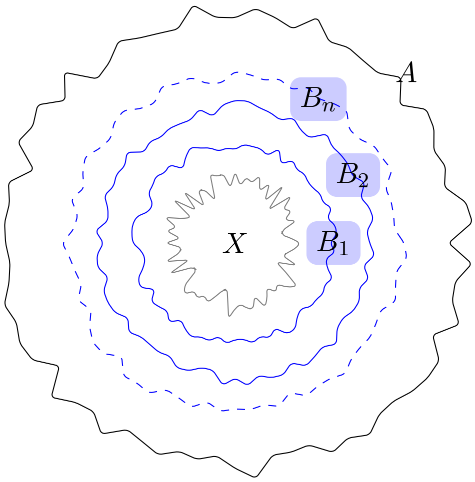
$$f_{\exists y\, \psi}(\bar{a}) = \begin{cases} \text{pewne } b \text{ takie, że } \mathbf{A} \models \psi[\bar{a}, b] & \text{jeśli takie } b \in A \text{ istnieje} \\ \text{jakiś element } A & \text{wpp} \end{cases}$$

Funkcję taką nazywamy *funkcją Skolema* dla $\exists y\, \psi$. Istnienie funkcji Skolema gwarantuje aksjomat wyboru.
Zauważmy, że rodzina $\{f_{\exists y\, \psi} : \psi$ formuła sygnatury $\sigma\}$ jest mocy $\leqslant \max(|\sigma|, \aleph_0)$ Rozważmy teraz ciąg zbiorów $X = B_0, B_1, B_2, \ldots$ zawartych w A, gdzie

$$B_{n+1} = \{f_{\exists y\, \psi}(\bar{a}) : \psi \text{ formuła, } \bar{a} \text{ krotka elementów z } B_n\}\,.$$

Twierdzimy, że

(i) $B_0 \subseteq B_1 \subseteq \ldots$
(ii) B_1 zawiera zawiera wszystkie elementy $c^{\mathbf{A}}$ dla $c \in \sigma$,
(iii) $\bigcup_n B_n$ jest zamknięte na wszystkie operacje $f^{\mathbf{A}}$, $f \in \sigma$.



Rysunek 3.1. Rysunek pomocniczy

ad(i) $a = f_{\exists y\, \psi}(a)$ dla $\psi(x, y)$ postaci $y = x$,
ad(ii) $c^{\mathbf{A}} = f_{\exists y\, \psi}$ dla $\psi(y)$ postaci $y = c$,
ad(iii) jeśli $f \in \sigma$, to $f^{\mathbf{A}}(\bar{a}) = f_{\exists y\, \psi}(\bar{a})$ dla $\psi(\bar{x}, y)$ postaci $y = f(\bar{x})$.

W takim razie $B \coloneqq \bigcup_n B_n$ jest uniwersum pewnej podstruktury $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$. Oczywiście $X \subseteq B$.
W celu pokazania, że $\mathbf{B} \preccurlyeq \mathbf{A}$, sprawdzimy, że spełniony jest warunek z kryterium Tarskiego-Vaughta. Niech $\psi(\bar{x}, y)$ będzie formułą, a $\bar{b}$ krotką elementów B. Załóżmy, że $\mathbf{A} \models \exists y\, \psi[\bar{b}]$. Z definicji $f_{\exists y \psi}$ wiemy, że $\mathbf{A} \models \psi[\bar{b}, a]$ dla $a \coloneqq f_{\exists y\, \psi}(\bar{b})$. Skoro jednak $\bar{b}$ składa się z elementów $B = \bigcup_n B_n$, to również $f_{\exists y\, \psi}(\bar{b}) \in B$, zgodnie z warunkiem z kryterium.

Pozostaje oszacować $|B|$. Wiemy, że$|B_0 \models |X|$. Ponadto,

$$|B_{n+1}| \leqslant \left| \underbrace{\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_n^k}_{\leqslant \max(|B_n|,\aleph_0)} \times \underbrace{\{\text{formuły}\}}_{\max(\aleph_0,|\sigma|)} \right| = \max(|B_n|, \aleph_0, |\sigma|).$$

Przez indukcję dowodzimy więc, że $|B_n| \leqslant \max(\aleph_0, |\sigma|, |X|)$. W takim razie, na mocy faktu 3.7.7, $|B| = |\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n| \leqslant \max(\aleph_0, |\sigma|, |X|)$. □

Wniosek 3.7.10. *Jeśli teoria T w sygnaturze σ ma nieskończony model, to ma model każdej mocy* $\geqslant \max(|\sigma|, \aleph_0)$

Dowód. Najpierw górne, a potem dolne twierdzenie Löwenheima-Skolema. □

Definicja 3.7.11. Teoria T jest *kategoryczna*, jeśli T ma z dokładnością do izomorfizmu dokładnie jeden model.

Wniosek 3.7.12. *Żadna T mająca nieskończony model nie jest kategoryczna.*

Uwaga. Dla ustalonej nieskończonej mocy T *może* być kategoryczna w danej mocy, tj. mieć dokładnie jeden model danej mocy.

Uwaga (wniosek z twierdzenia Morleya z 1965 r. i kilku prostszych wyników)**.** Jeśli T jest teorią w co najwyżej przeliczalnej sygnaturze i ma model nieskończony, to zachodzi jedna z następujących czterech sytuacji:

- T jest kategoryczna w każdej mocy nieskończonej,
- T jest kategoryczna w mocy $\aleph_0$, ale nie jest kategoryczna w żadnej mocy nieprzeliczalnej,
- T jest kategoryczna w każdej mocy nieprzeliczalnej, ale nie w mocy $\aleph_0$,
- T nie jest kategoryczna w żadnej mocy.

Wniosek 3.7.13 (tzw. paradoks Skolema)**.** *Jeśli teoria mnogości* ZFC *ma model, to ma model przeliczalny (mimo że orzeka istnienie zbiorów nieprzeliczalnych).*

Wniosek 3.7.14. *Istnieje przeliczalny niestandardowy model arytmetyki.*

Dowód. $Th(\mathbb{N}, +, \cdot, \leqslant, 0, 1) \cup \{c > \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n \text{ razy}} : n \in \mathbb{N}\}$, gdzie c jest nową stałą, jest z twierdzenia o zwartości (bądź bezpośredniej konstrukcji ultrapotęgi) spełnialna, a więc na mocy dolnego Lowenheima-Skolema ma model przeliczalny. □

3.8. Postacie normalne

Definicja 3.8.1. Formuła jest w *preneksowej postaci normalnej*, jeśli jest postaci $Q_1x_1 \dots Q_nx_n\psi$, gdzie Q_i dla $i = 1, \dots, n$ to kwantyfikatory, ψ jest formułą bezkwantyfikatorową, a ponadto zmienne x_i są parami różne.

Definicja 3.8.2. Formuły φ i ψ są *logicznie równoważne* (ozn. $\psi \equiv \varphi$), jeśli dla każdych $\mathbf{A}$, ν zachodzi: $\mathbf{A} \models \varphi[\nu]$ wtw $\mathbf{A} \models \psi[\nu]$.

Twierdzenie 3.8.3. *Każda formuła jest logicznie równoważna pewnej formule w preneksowej postaci normalnej.*

Dowód. Niech $\widehat{Q}$ oznacza kwantyfikator dualny do danego, tj. $\widehat{\exists} = \forall$, $\widehat{\forall} = \exists$. Dowód przebiega przez indukcję po budowie formuły. Będziemy korzystać z następujących równoważności logicznych:

(i) $\neg Qx\,\varphi \equiv \widehat{Q}x\,\neg\varphi$,
(ii) $Qx\,\varphi \vee \psi \equiv Qx\,(\varphi \vee \psi)$, jeśli $x \notin FV(\psi)$,
(iii) $Q_1x\,Q_2x_2\,\ldots Q_{i-1}x_{i-1}\,Q_ix\ldots Q_nx_n\,\psi \equiv Q_2x_2\ldots Q_{i-1}x_{i-1}\,Q_ix\ldots Q_nx_n\,\psi$,
(iv) $Q_1x_1\ldots Q_nx_n\,\psi(x_1,\ldots,x_n,\bar{y}) \equiv Q_1z_1\ldots Q_nz_n\,\psi(z_1,\ldots,z_n,\bar{y})$, gdzie zmienne x_i parami różne, z_i też parami różne i z_i nie występują po lewej stronie (przemianowanie zmiennych związanych).

Sprawdźmy poszczególne kroki indukcji:

- Formuła atomowa z definicji jest w preneksowej postaci normalnej.
- Jeśli φ jest postaci $\neg\psi$, a $\psi \equiv Q_1x_1\ldots Q_nx_n\,\eta$, to $\varphi \equiv \hat{Q}_1x_1\ldots\hat{Q}_nx_n\,\neg\eta$.
- Niech φ będzie postaci $\psi \vee \xi$, gdzie $\psi \equiv Q_1x_1\ldots Q_nx_n\,\eta$ i $\xi \equiv Q'_1y_1\ldots Q'_ky_k\,\vartheta$. Zastępujemy zmienne x_i nowymi zmiennymi w_i, nie występującymi w postaci normalnej ξ. Podobnie zastępujemy zmienne y_i nowymi zmiennymi z_i, nie występującymi w postaci normalnej ψ. Używając (iv) i (ii), otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\psi \vee \xi &\equiv Q_1w_1\ldots Q_nw_n\,\eta \vee Q'_1z_1,\ldots Q'_kz_k\,\vartheta \\ &\equiv Q_1w_1\,(Q_2w_2\ldots Q_nw_n\,\eta \vee Q'_1z_1,\ldots Q'_kz_k\,\vartheta) \equiv \ldots \\ &\equiv Q_1w_1\ldots Q_nw_n\,Q'_1z_1,\ldots Q'_kz_k\,(\eta \vee \vartheta).\end{aligned}$$

- Niech φ będzie postaci $\exists x\,\psi$, gdzie $\psi \equiv Q_1x_1\ldots Q_nx_n\,\eta$. Jeśli zmienna x jest jedną z x_i dla $i = 1,\ldots,n$, to $\varphi \equiv Q_1x_1\ldots Q_nx_n\,\eta$. W przeciwnym przypadku $\varphi \equiv \exists x\,Q_1x_1\ldots Q_nx_n\,\eta$.

□

Definicja 3.8.4. Niech φ będzie formułą w preneksowej postaci normalnej,

$$\varphi := \forall x_1\,\exists y_1\ldots\forall x_n\,\exists y_n\,\eta(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n,\bar{z}).$$

Skolemizacją formuły φ nazwiemy formułę φ^{sk} postaci:

$$\forall x_1\ldots\forall x_n\,\eta(x_1,\ldots,x_n,f_1(x_1,\bar{z}),\ldots,f_n(x_1,\ldots,x_n,\bar{z}),\bar{z}),$$

gdzie f_i to nowe symbole funkcyjne.

Twierdzenie 3.8.5. *φ jest spełnialna wtw φ^{sk} jest spełnialna.*

Dowód. Sprawdźmy implikacje w obu kierunkach.

($\Leftarrow$) Oczywiste: świadkami na kwantyfikatory egzystencjalne $\exists y_i$ są wartości odpowiednich funkcji f_i. Zauważmy, że istotnie korzystamy z tego, iż argumentami f_i są wyłącznie $x_1, \ldots, x_{i-1}$ oraz ewentualne zmienne wolne $\bar{z}$ formuły φ.

($\Rightarrow$) Niech $\mathbf{A} \models \varphi\,[\bar{a}/\bar{z}]$. Zdefiniujemy $\widetilde{\mathbf{A}} = \left(\mathbf{A}, f_1^{\widetilde{\mathbf{A}}}, \ldots, f_n^{\widetilde{\mathbf{A}}}\right)$. W tym celu użyjemy idei funkcji Skolema z dowodu dolnego twierdzenia Löwenheima-Skolema. Używając notacji z tamtego dowodu, zdefiniujmy przez indukcję po $i = 1, \ldots, n$:

$$f_i^{\widetilde{\mathbf{A}}}(x_1, \ldots, x_i, \bar{z}) = f_{\exists y_i\,\forall x_{i+1} \ldots \forall x_n\, \eta(x_1,\ldots,x_n,f_1(x_1,\bar{z}),\ldots,f_{i-1}(x_1,\ldots,x_{i-1},\bar{z}),y_i,\ldots,y_n,\bar{z})}(x_1, \ldots, x_i, \bar{z}).$$

(Idea jest taka, że f_i znajduje hipotetycznego świadka na kwantyfikator $\exists y_i$ przy założeniu, że rolę $\exists y_1, \ldots, \exists y_{i-1}$ grają wartości uprzednio zdefiniowanych funkcji $f_1, \ldots, f_{i-1}$.) Następnie przez indukcję po i sprawdzamy, że

$$\widetilde{\mathbf{A}} \models \forall x_1 \ldots \forall x_i\, \forall x_{i+1}\, \exists y_{i+1} \ldots \forall x_n\, \exists y_n$$
$$\eta(x_1, \ldots, x_n, f_1(x_1, \bar{z}), \ldots, f_i(x_1, \ldots, x_i, \bar{z}), y_{i+1}, \ldots, y_n, \bar{z}) \left[\bar{a}\big/\bar{z}\right].$$

$\square$

Definicja 3.8.6. Niech φ będzie formułą w preneksowej postaci normalnej,

$$\varphi := \exists x_1\, \forall y_1 \ldots \exists x_n\, \forall y_n\, \eta(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, \bar{z}).$$

Herbrandyzacją φ nazywamy formułę φ^H postaci

$$\exists x_1 \ldots \exists x_n\, \eta(x_1, \ldots, x_n, f_1(x_1, \bar{z}), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n, \bar{z}), \bar{z}).$$

Zauważmy, że Herbrandyzacja jest operacją dualną do Skolemizacji, w następującym sensie: jeśli φ jest jak wyżej, a $\overline{\varphi}$ oznacza formułę w postaci preneksowej powstającą z $\neg\varphi$ wskutek zastosowania praw De Morgana dla kwantyfikatorów, to $\varphi^H \equiv \neg(\overline{\varphi}^{sk})$. Stąd natychmiast otrzymujemy:

Stwierdzenie 3.8.7. *Jeśli φ zdaniem w postaci preneksowej to $\models \varphi$ wtw $\models \varphi^H$.* $\square$

Ciekawszy jest natomiast następujący fakt.

Twierdzenie 3.8.8 (Twierdzenie Herbranda, słaba wersja)**.** *Niech σ zawiera stałą indywiduową. Niech φ będzie zdaniem sygnatury σ postaci $\exists x_1 \ldots \exists x_n\, \eta(x_1, \ldots, x_n)$, gdzie η jest formułą bezkwantyfikatorową. Wtedy jeśli $\models \varphi$, to istnieje alternatywa postaci*

$$\bigvee_{i=1}^{k} \eta(t_1^i, \ldots, t_n^i) \quad \textit{gdzie } t_j^i \textit{ to termy nie zawierające zmiennych}$$

będąca tautologią.

Twierdzenie Herbranda w połączeniu ze Stwierdzeniem 3.8.7 mówi, że pytanie tautologiczność zdań logiki pierwszego rzędu redukuje się w pewnym sensie do zagadnienia tautologiczności zdań bezkwantyfikatorowych (a w ostatecznym rozrachunku – formuł logiki zdań). Nie otrzymujemy jednak (nieprzypadkowo) efektywnej procedury redukcji: nia podstawie samego kształtu zdania ψ nie jesteśmy w stanie efektywnie wyznaczyć liczby k ani ograniczyć złożoności termów t^i_j.
Jeśli φ jest zdaniem postaci j.w., to każdą alternatywę postaci $\bigvee_{i=1}^{k} \eta(t^i_1, \ldots, t^i_n)$ dla dowolnego k i dowolnych termów t^i_j bez zmiennych nazywamy *alternatywą Herbranda* dla φ.

Dowód. Załóżmy, że nie ma tautologicznej alternatywy Herbranda dla φ. Weźmy teorię

$$T = \{\neg\eta(t_1, \ldots, t_n) : t_i \text{ termy bez zmiennych}\}.$$

Z założenia T jest skończenie spełnialna, a zatem spełnialna. Niech $\mathbf{A} \models T$. Niech $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$ będzie podstrukturą o uniwersum $B = \left\{t^{\mathbf{A}} : t \text{ term bez zmiennych}\right\}$ Wtedy, jak łatwo sprawdzić,

$$\mathbf{B} \not\models \exists x_1 \ldots, \exists x_n\, \eta(x_1, \ldots, x_n).$$

□

Przykład. Niech ψ będzie zdaniem $\exists x\, \forall y\, (Ry \Rightarrow Rx)$. Wtedy ψ^H ma postać $\exists x\, (R(f(x)) \Rightarrow Rx)$. Tautologiczną alternatywą Herbranda dla ψ jest natomiast

$$[R(f(c)) \Rightarrow R(c)] \vee [R(f(f(c))) \Rightarrow R(f(c))].$$

3.9. Podstawienia termów

Zmierzamy w stronę opisu systemu dowodowego dla logiki pierwszego rzędu i dowodu twierdzenia o pełności. Musimy jednak najpierw zająć się pewnym dość irytującym zagadnieniem technicznym.
Załóżmy, że mamy formułę φ, w której występuje zmienna wolna x, a ponadto mamy term t. Chcielibyśmy móc podstawić term t w φ w miejsce x, otrzymując formułę – oznaczmy ją na przykład przez $\varphi\left({}^{t}/_{x}\right)$ – która intuicyjnie „mówiłaby o obiekcie nazwanym przez t to samo, co $\varphi(x)$ mówi o x”. (Zauważmy, że de facto naiwnie używaliśmy już tej operacji, kiedy mowa była o Skolemizacji i Herbrandyzacji. Tam pisaliśmy po prostu $\varphi(t)$.)
Zależy nam w szczególności na tym, by z $\varphi\left({}^{t}/_{x}\right)$ wynikało $\exists x\, \varphi$: jeśli element uniwersum nazwany przez t ma własność orzekaną przez φ, to *jakiś* element uniwersum ma tę własność. Tu pojawia się jednak pewien kłopot.

Przykład. Rozważmy formułę $\varphi(x)$ postaci $\forall y\, (x = y)$ i term $t := y$. Wtedy $\varphi\left({}^{y}/_{x}\right)$ byłoby formułą $\forall y\, (y = y)$. Ale z całą pewnością implikacja $\forall y\, (y = y) \Rightarrow \exists x\, \forall y\, (x = y)$ nie jest tautologią.

W celu uniknięcia podstawień takich jak w powyższym przykładzie wprowadzamy następującą definicję.

Definicja 3.9.1. Niech φ będzie formuła, x – zmienną, t – termem. Mówimy, że term t jest *podstawialny* za x w formule φ, jeśli nie istnieje wolne wystąpienie zmiennej x w φ będące w zasięgu kwantyfikatora Qy dla pewnej zmiennej y występującej w t. (Dane wystąpienie zmiennej x jest w zasięgu Qy, jeśli istnieje podformuła formuły φ zawierająca to wystąpienie x i zaczynająca się od Qy.)

Definicja 3.9.2. Niech t będzie termem podstawialnym za zmienną x w formule φ. Wtedy $\varphi\left({}^{t}/_{x}\right)$ jest formułą powstającą z φ w wyniku jednoczesnego zastąpienia wszystkich wolnych wystąpień x w φ termem t.

Przykład. Niech φ będzie formułą $\exists y\,(y + y = x) \wedge \exists x\,\forall z\,(x \leqslant z)$.

(i) Jeśli $t := x + 3$, to $\varphi\left({}^{t}/_{x}\right)$ ma postać $\exists y\,(y + y = x + 3) \wedge \exists x\,\forall z\,(x \leqslant z)$.
(ii) Jeśli $t := y + 3$, to t nie jest podstawialne za x w φ (zmienna y w t znalazłaby się w zasięgu kwantyfikatora $\exists y$).
(iii) Jeśli $t := x + z + 3$, to $\varphi\left({}^{t}/_{x}\right)$ ma postać $\exists y\,(y + y = x + z + 3) \wedge \exists x\,\forall z\,(x \leqslant z)$.

Następujące stwierdzenie mówi, że jeśli term t jest podstawialny za x w φ, to formuła $\varphi\left({}^{t}/_{x}\right)$ ma oczekiwane przez nas własności; w szczególności $\varphi\left({}^{t}/_{x}\right) \Rightarrow \exists x\,\varphi$ jest tautologią.

Stwierdzenie 3.9.3. *Jeśli term t jest podstawialny za x w φ, to dla dowolnej struktury $\mathbf{A}$ i wartościowania ν w $\mathbf{A}$ zachodzi*

$$\mathbf{A} \models \varphi\left({}^{t}/_{x}\right)[\nu] \text{ wtw } \mathbf{A} \models \varphi\left[\nu\left[{}^{t^{\mathbf{A}}[\nu]}/_{x}\right]\right].$$

Dowód. Przez zniechęcenie: żmudna, chociaż dość rutynowa indukcja, której szczegóły zostawiamy czytelnikowi. $\square$

3.10. Dowody w logice I rzędu. Twierdzenie o pełności

Podobnie jak w wypadku rachunku zdań, dowody w logice pierwszego rzędu będziemy formalizować za pomocą rachunku sekwentów. Definicje: sekwentu, dowodu formuły i dowodu formuły na podstawie teorii (por. Definicje 1.3.1 i 1.3.2), jak również zamierzona interpretacja sekwentu, pozostają bez zmian, z tym istotnym zastrzeżeniem, że obecnie w sekwentach pojawiać się będą formuły pierwszego rzędu, a nie formuły logiki zdań.

Ponieważ formuły pierwszego rzędu budujemy za pomocą nie tylko spójników, ale i kwantyfikatorów, musimy uzupełnić nasz system o reguły umożliwiające wprowadzanie kwantyfikatorów. Do dotychczasowych reguł dodajemy więc następujące.

Reguły wprowadzania kwantyfikatorów

$$\frac{\Gamma, \varphi\,(^y/_x) \;\longrightarrow \Delta}{\Gamma, \exists x\,\varphi \;\longrightarrow \Delta}\,(\exists{:}\mathrm{L}) \qquad\qquad \frac{\Gamma \;\longrightarrow \Delta, \varphi\,(^t/_x)}{\Gamma \;\longrightarrow \Delta, \exists x\,\varphi}\,(\exists{:}\mathrm{R})$$

$$\frac{\Gamma, \varphi\,(^t/_x) \;\longrightarrow \Delta}{\Gamma, \forall x\,\varphi \;\longrightarrow \Delta}\,(\forall{:}\mathrm{L}) \qquad\qquad \frac{\Gamma \;\longrightarrow \Delta, \varphi\,(^y/_x)}{\Gamma \;\longrightarrow \Delta, \forall x\,\varphi}\,(\forall{:}\mathrm{R}),$$

gdzie w regułach (∃:R) i (∀:L) term t może być dowolnym termem podstawialnym za x w φ, ale *w (∃:L) i (∀:R) żądamy, żeby y było zmienną, nie występującą ponadto w dolnym sekwencie reguły.* Sens tego ograniczenia wyjaśnijmy na przykładzie reguł prawostronnych: żeby wywnioskować $\exists x\,\varphi$, wystarczy wiedzieć, że jakiś element (na przykład ten nazwany przez t) ma własność orzekaną przez φ; żeby natomiast wywnioskować $\forall x\,\varphi$, trzeba wiedzieć, że własność tę *zupełnie dowolny* element, o którym niczego nie zakładamy ani w Γ czy Δ, ani w kształcie nazywającego go termu.

W kontekście formalnych systemów dowodowych rozważa się niekiedy logikę bez symbolu równości. Wtedy dodanie powyższych reguł kończy opis rachunku sekwentów dla logiki pierwszego rzędu. My jednak pracujemy w logice z symbolem „=" i zakładamy, że oznacza on faktyczną relację równości między dwoma elementami. Żeby system dowodowy odzwierciedlał to założenie, trzeba go uzupełnić o odpowiednie aksjomaty.

Aksjomaty równości

$$\frac{}{\longrightarrow t = t}\,(\mathrm{AE1}) \qquad\qquad \frac{}{t_1 = s_1, \ldots, t_n = s_n, R(\bar{t}) \longrightarrow R(\bar{s})}\,(\mathrm{AE4})$$

$$\frac{}{t = s \longrightarrow s = t}\,(\mathrm{AE2})$$

$$\frac{}{t = s, s = u \longrightarrow t = u}\,(\mathrm{AE3}) \qquad\qquad \frac{}{t_1 = s_1, \ldots, t_n = s_n, \longrightarrow f(\bar{t}) = f(\bar{s})}\,(\mathrm{AE5}),$$

gdzie s, t, u (ew. z indeksami) to dowolne termy, R jest dowolnym symbolem relacyjnym, a f – dowolnym symbolem funkcyjnym o odpowiedniej liczbie argumentów.

Przykład. Poniższe rozumowanie w rachunku sekwentów dla logiki I rzędu jest dowodem sekwentu wyrażającego jedno z praw zamiany kolejności kwantyfikatorów.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{R(u,z) \;\longrightarrow R(u,z)}{\forall_x R(x,z) \;\longrightarrow R(u,z)}\,(\forall{:}\mathrm{R})}{\forall x\, R(x,z) \;\longrightarrow \exists y\, R(u,y)}\,(\exists{:}\mathrm{R})}{\forall x\, R(x,z) \;\longrightarrow \forall x\, \exists y\, R(x,y)}\,(\forall{:}\mathrm{R})}{\exists y\, \forall x\, R(x,y) \;\longrightarrow \forall x\, \exists y\, R(x,y)}\,(\exists{:}\mathrm{L})$$

Zauważmy, że akurat ten dowód nie wykorzystuje żadnej reguły wprowadzania spójników.

Twierdzenie 3.10.1 (o pełności dla logiki pierwszego rzędu)**.** *Jeśli T jest zbiorem zdań, a φ jest zdaniem, to: $T \vdash \varphi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $T \models \varphi$.*

Dowód. Udowodnimy implikacje w obu kierunkach.
($\Rightarrow$) Przez indukcję po budowie dowodu pokazujemy:

$$\text{jeśli sekwent } \Gamma \to \Delta \text{ ma dowód, to dla każdego } \mathbf{A}, \nu \text{ zachodzi } \mathbf{A} \models \bigwedge \Gamma \Rightarrow \bigvee \Delta[\nu]. \qquad (\flat)$$

Kroki dla aksjomatów (w tym aksjomatów równości) i reguł rachunku zdań są bezproblemowe. Pozostaje sprawdzić reguły dla kwantyfikatorów. Zajmiemy się ($\exists$:R) i ($\forall$:R); rozumowania dla, odpowiednio, ($\forall$:L) i ($\exists$:L) są analogiczne.
Załóżmy, że ($\flat$) zachodzi dla sekwentu $\Gamma \longrightarrow \Delta, \varphi\left({}^{t}/_{x}\right)$ i sprawdźmy, że ($\flat$) zachodzi również dla $\Gamma \longrightarrow \Delta, \exists x\, \varphi$. Weźmy $\mathbf{A}, \nu$ i załóżmy, że $\mathbf{A} \models \bigwedge \Gamma[\nu]$. Wtedy na mocy założenia indukcyjnego mamy jedno z dwojga:

(i) $\mathbf{A} \models \bigvee \Delta[\nu]$. Wtedy też $\mathbf{A} \models \bigvee \Delta \vee \exists x\, \varphi\, [\nu]$.
(ii) $\mathbf{A} \models \varphi\left({}^{t}/_{x}\right)[\nu]$. Wtedy na mocy stwierdzenia 3.9.3 mamy $\mathbf{A} \models \varphi\left[\nu\left[{}^{b}/_{x}\right]\right]$ gdzie $b := t^{\mathbf{A}}[\nu]$. Z definicji spełniania dla $\exists x\, \varphi$ wnioskujemy $\mathbf{A} \models \exists x\, \varphi[\nu]$, czyli $\mathbf{A} \models \bigvee \Delta \vee \exists x\, \varphi[\nu]$.

Załóżmy teraz, że ($\flat$) zachodzi dla sekwentu $\Gamma \to \Delta, \varphi\left({}^{y}/_{x}\right)$, gdzie y nie występuje w Γ, Δ ani φ. Sprawdzimy, że ($\flat$) zachodzi również dla $\Gamma \longrightarrow \Delta, \forall x\, \varphi$. Weźmy $\mathbf{A}, \nu$ takie, że $\mathbf{A} \models \bigwedge \Gamma[\nu]$. Mamy wtedy jedno z dwojga:

(i) $\mathbf{A} \models \bigvee \Delta[\nu]$. Wtedy też $\mathbf{A} \models \bigvee \Delta \vee \forall x\, \varphi\, [\nu]$.
(ii) $\mathbf{A} \not\models \bigvee \Delta[\nu]$. Wtedy, skoro y nie występuje w Γ ani Δ, dla dowolnego $a \in A$ zachodzi $\mathbf{A} \not\models \bigvee \Delta\left[\nu\left[{}^{a}/_{y}\right]\right]$, więc na mocy założenia indukcyjnego dla dowolnego $a \in A$ mamy $\mathbf{A} \models \varphi\left({}^{y}/_{x}\right)\left[\nu\left[{}^{a}/_{y}\right]\right]$, co na mocy stwierdzenia 3.9.3 implikuje $\mathbf{A} \models \varphi\left[\left(\nu\left[{}^{a}/_{y}\right]\right)\left[{}^{a}/_{x}\right]\right]$. Skoro y nie występuje w φ, oznacza to, że $\mathbf{A} \models \varphi\left[\nu\left[{}^{a}/_{x}\right]\right]$. Z dowolności a i definicji spełniania dla $\forall x$ wnioskujemy, że $\mathbf{A} \models \forall x\, \varphi[\nu]$.

($\Leftarrow$) Podobnie jak dla rachunku zdań (por. lemat 1.4.5) pokażemy:

Lemat 3.10.2. *Jeśli teoria T jest niesprzeczna, to istnieje $\mathbf{A} \models T$.*

Lemat 3.10.2 pociąga za sobą implikację ($\Leftarrow$) z treści twierdzenia w analogiczny sposób jak dla rachunku zdań: jeśli $T \not\vdash \varphi$, to teoria jest $T + \neg\varphi$ niesprzeczna, co na mocy lematu oznacza, że istnieje $\mathbf{A} \models T + \neg\varphi$; innymi słowy, $T \not\models \varphi$.
Dowodząc odpowiednika lematu 3.10.2 dla rachunku zdań, rozszerzaliśmy daną niesprzeczną teorię T do teorii maksymalnej niesprzecznej, z której następnie odczytywaliśmy wartościowanie spełniające T. Obecnie, chcąc zbudować strukturę relacyjną, a nie tylko wartościowanie w sensie rachunku zdań, musimy żądać, by nasza maksymalna niesprzeczna teoria miała pewną dodatkową własność.

Definicja 3.10.3. Powiemy, że teoria T ma własność *zaświadczania przez stałe*, jeśli dla każdej formuły $\varphi(x)$ (tj. $FV(\varphi) \subseteq \{x\}$) istnieje pewna stała c taka, że $T + \exists x\, \varphi(x) \vdash \varphi\left({}^{c}/_{x}\right)$.

Podlemat. *Jeśli teoria T jest niesprzeczna, to istnieje niesprzeczna $T^{+} \supseteq T$ mająca własność zaświadczenia przez stałe.*

Proces rozszerzania teorii T do teorii mającej własność zaświadczania przez stałe nazywa się czasem *henkinizacją* teorii T, od nazwiska pomysłodawcy, Leona Henkina.

Dowód podlematu. Zdefiniujmy ciąg teorii $T_0 \subseteq T_1 \subseteq \ldots$, gdzie $T_0 = T$, a T_{n+1} powstaje z T_n w następujący sposób: dla każdej formuły $\varphi(x)$ w sygnaturze teorii T_n dodajemy do sygnatury odrębną stała c_φ i przyjmujemy

$$T_{n+1} \coloneqq T_n \cup \left\{\exists x\, \varphi \Rightarrow \varphi\left({}^{c_\varphi}/_{x}\right) : \varphi(x) \text{ w sygnaturze } T_n\right\}$$

Przyjmijmy następnie $T^{+} \coloneqq \bigcup_n T_n$. Jasne jest, że T^{+} ma własność zaświadczania przez stałe. Pozostaje sprawdzić, że T^{+} jest niesprzeczna. Na mocy konstrukcji i twierdzenia o zwartości wystarczy sprawdzić, że:

$$\begin{array}{l} \text{jeśli } S \text{ jest niesprzeczna, } \varphi(x) \text{ w sygnaturze } S\text{, a } c \text{ stała spoza sygnatury } S\text{,} \\ \text{to } S \cup \left\{\exists x\, \varphi \Rightarrow \varphi\left({}^{c}/_{x}\right)\right\} \text{ jest niesprzeczna.} \end{array} \tag{$\clubsuit$}$$

Załóżmy, że ($\clubsuit$) nie zachodzi. Niech S będzie teorią niesprzeczną i niech Γ będzie skończonym ciągiem formuł z S takim, że istnieje dowód sekwentu $\Gamma, (\exists x\, \varphi \Rightarrow \varphi\left({}^{c}/_{x}\right)) \longrightarrow$. Możemy skonstruować dowód:

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma, (\exists x\, \varphi \Rightarrow \varphi\left({}^{c}/_{x}\right)) \longrightarrow} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi\left({}^{c}/_{x}\right) \longrightarrow \varphi\left({}^{c}/_{x}\right)}{\varphi\left({}^{c}/_{x}\right), \exists x\, \varphi \longrightarrow \varphi\left({}^{c}/_{x}\right)}}{\varphi\left({}^{c}/_{x}\right) \longrightarrow (\exists x\, \varphi \Rightarrow \varphi\left({}^{c}/_{x}\right))}\;(\Rightarrow{:}\mathrm{R})}{\Gamma, \varphi\left({}^{c}/_{x}\right) \longrightarrow (\exists x\, \varphi \Rightarrow \varphi\left({}^{c}/_{x}\right))}}{\Gamma, \varphi\left({}^{c}/_{x}\right) \longrightarrow}\;(\text{cięcie})$$

Mamy więc dowód sekwentu $\Gamma, \varphi\left({}^{c}/_{x}\right) \longrightarrow$. Zastępując w nim stałą c przez nie używaną do tej pory zmienna wolną y, otrzymujemy poprawny dowód sekwentu $\Gamma, \varphi\left({}^{y}/_{x}\right) \longrightarrow$. Ponieważ y z założenia nie występuje w Γ, możemy zastosować regułę ($\exists$:L) i wywnioskować $\Gamma, \exists x\, \varphi \longrightarrow$, a następnie skonstruować dowód:

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma, (\exists x\, \varphi \Rightarrow \varphi\left({}^{c}/_{x}\right)) \longrightarrow} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma, \exists x\, \varphi \longrightarrow}}{\Gamma, \exists x\, \varphi \longrightarrow \varphi\left({}^{c}/_{x}\right)}}{\Gamma \longrightarrow (\exists x\, \varphi \Rightarrow \varphi\left({}^{c}/_{x}\right))}\;(\Rightarrow{:}\mathrm{R})}{\Gamma \longrightarrow}\;(\text{cięcie})$$

A zatem S jest sprzeczna, co jest sprzeczne z założeniem. To kończy dowód ($\clubsuit$) i całego podlematu. $\square$

Dowód lematu 3.10.2. Rozszerzmy T do niesprzecznej T^+ mającej własność zaświadczenia przez stałe, a następnie, za pomocą lematu Kuratowskiego-Zorna, rozszerzmy T^+ do teorii T^{++} maksymalnej niesprzecznej w sygnaturze σ^+ tej samej co T^+. Łatwo spostrzec, że T^{++} nadal ma własność zaświadczenia przez stałe. Na zbiorze stałych sygnatury σ^+ definiujemy relację $\sim$

$$c \sim d \text{ wtw } T^{++} \vdash c = d.$$

Na postawie aksjomatów (AE1–AE3) łatwo sprawdzić, że $\sim$ jest relacją równowazności.
Na zbiorze

$$A := \left\{\text{stałe sygnatury } \sigma^+\right\}\Big/_{\sim}$$

zdefiniujemy teraz strukturę relacyjną $\mathbf{A}$ sygnatury σ^+.
Dla dowolnego n-argumentowego symbolu relacyjnego $R \in \sigma^+$ przyjmujemy:

$$([c_1], \ldots, [c_n]) \in R^{\mathbf{A}} \text{ wtw } T^{++} \vdash R(c_1, \ldots, c_n).$$

Definicja ta jest poprawna na mocy aksjomatu (AE4).
Dla dowolnego n-argumentowego symbolu funkcyjnego $f \in \sigma^+$ przyjmujemy:

$$f^{\mathbf{A}}([c_1], \ldots, [c_n]) = [d] \text{ dla takiego } d, \text{ że } T^{++} \vdash d = f(c_1, \ldots, c_n).$$

Sprawdźmy poprawność tej definicji. Na mocy aksjomatu (AE5) warunek $T^{++} \vdash d = f(c_1, \ldots, c_n)$ nie zależy od wyboru reprezentantów klas $[c_1], \ldots, [c_n], [d]$. Dalej, dla danych $c_1, \ldots, c_n$ istnieje klasa $[d]$ spełniająca ten warunek, jako że $T^{++} \models \exists x\,(x = f(c_1, \ldots, c_n))$, a ponadto T^{++} ma własność zaświadczenia przez stałe. Wreszcie, klasa $[d]$ jest wyznaczona jednoznacznie, gdyż $T^{++} \vdash (d = f(c_1, \ldots, c_n) \wedge e = f(c_1, \ldots, c_n)) \Rightarrow d = e$.
Dla dowolnej stałej indywiduowej $c \in \sigma^+$ przyjmujemy $c^{\mathbf{A}} = [c]$.
Zdefiniowawszy w ten sposób strukturę $\mathbf{A}$, możemy, odwołując się do zaświadczania przez stałe, pokazać przez indukcję po budowie termów, że dla każdego t nie zawierającego zmiennych, wartością $t^{\mathbf{A}}$ termu t w strukturze $\mathbf{A}$ jest klasa $[d]$ dla d takiego, że $T^{++} \vdash d = t$. Wykażemy teraz, że

$$\text{dla każdego } \textit{zdania } \varphi \text{ zachodzi: } \mathbf{A} \models \varphi \text{ wtw } T^{++} \vdash \varphi. \qquad (\heartsuit)$$

To zakończy dowód lematu,a zatem i twierdzenia o pełności, bo z ($\heartsuit$) natychmiast wynika $\mathbf{A} \models T$.
Tezy ($\heartsuit$) dowodzimy przez indukcję po budowie φ.

- Jeśli φ jest postaci $t_1 = t_2$, to z definicji spełniania $\mathbf{A} \models t_1 = t_2$ wtw $t_1^{\mathbf{A}} = t_2^{\mathbf{A}}$. Biorąc stałe d, e takie, że $T^{++} \vdash c = t_1$ i $T^{++} \vdash d = t_2$, mamy:

$$t_1^{\mathbf{A}} = t_2^{\mathbf{A}} \text{ wtw } [c] = [d] \text{ wtw } T^{++} \vdash c = d \text{ wtw } T^{++} \vdash t_1 = t_2.$$

- Jeśli φ jest postaci $R(t_1, \dots, t_n)$, to z definicji $\mathbf{A} \models R(t_1, \dots, t_n)$ wtw $(t_1^{\mathbf{A}}, \dots, t_n^{\mathbf{A}}) \in R^{\mathbf{A}}$. Biorąc stałe $d_1, \dots, d_n$ takie, że T^{++} dowodzi $d_1 = t_1, \dots, d_n = t_n$, mamy:

$$(t_1^{\mathbf{A}}, \dots, t_n^{\mathbf{A}}) \in R^{\mathbf{A}} \text{ wtw } ([d_1], \dots, [d_n]) \in R^{\mathbf{A}} \text{ wtw}$$
$$\text{wtw } T^{++} \vdash R(d_1, \dots, d_n) \underset{AE1-AE4}{\text{wtw}} T^{++} \vdash R(t_1, \dots, t_n).$$

- Kroki dla $\varphi := \neg\psi$ oraz $\varphi := (\psi \circ \eta)$, gdzie $\circ$ jest spójnikiem dwuargumentowym, są takie same jak w logice zdań. W szczególności w kroku dla negacji sprawdzamy, że dla każdego ψ dokładnie jedno z $\psi, \neg\psi$ należy do T^{++}.
- Niech φ będzie postaci $\exists x\, \psi(x)$. Załóżmy najpierw, że $\mathbf{A} \models \exists x\, \psi$. Wtedy jest stała c taka, że $\mathbf{A} \models \psi\left[{}^{[c]}/_{x}\right]$. Ponieważ $c^{\mathbf{A}} = [c]$, ze stwierdzenia 3.9.3 możemy wywnioskować, że $\mathbf{A} \models \psi\,({}^{c}/_{x})$. Ale $\psi\,({}^{c}/_{x})$ jest zdaniem, więc z założenia indukcyjnego dostajemy $T^{++} \vdash \psi\,({}^{c}/_{x})$ i w konsekwencji $T^{++} \vdash \exists x\, \psi$.
  Załóżmy teraz, że $T^{++} \vdash \exists x\, \psi$. Ponieważ T^{++} ma własność zaświadczania przez stałe, otrzymujemy $T^{++} \vdash \psi\,({}^{c}/_{x})$ dla jakiejś stałej c. Z założenia indukcyjnego $\mathbf{A} \models \psi\,({}^{c}/_{x})$, czyli na mocy stwierdzenia 3.9.3 $\mathbf{A} \models \psi\left[{}^{c^{\mathbf{A}}}/_{x}\right]$. Z definicji spełniania wynika więc $\mathbf{A} \models \exists x\, \psi$.
- Krok dla φ postaci $\forall x\, \psi$ wynika z kroków dla $\exists, \neg$ oraz praw de Morgana dla kwantyfikatorów (które są spełnione w $\mathbf{A}$ i dowodliwe w T^{++}).

$\square$

$\square$

3.11. Gry Ehrenfeuchta-Fraïsségo

Definicja 3.11.1. *Rangę kwantyfikatorową formuły* φ (ozn. $\mathrm{qr}(\varphi)$) definiujemy przez indukcję po budowie φ:
- $\mathrm{qr}(\varphi) = 0$ dla φ atomowej,
- $\mathrm{qr}(\neg\varphi) = \mathrm{qr}(\varphi)$,
- $\mathrm{qr}(\varphi \circ \psi) = \max(\mathrm{qr}(\varphi), \mathrm{qr}(\psi))$ dla $\circ \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$,
- $\mathrm{qr}(Qx\, \varphi) = \mathrm{qr}(\varphi) + 1$ dla $Q \in \{\forall, \exists\}$.

Przykład. Ranga kwantyfikatorowa formuły $\neg\exists x\,(\exists y\, R(x,y) \wedge \forall_z \neg S(x,z))$ wynosi 2.

Definicja 3.11.2. Dla $n \in \mathbb{N}$, struktury $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ są *n-równoważne* (ozn. $\mathbf{A} \equiv_n \mathbf{B}$), jeśli dla dowolnego zdania φ spełniającego $\mathrm{qr}(\varphi) \leqslant n$ mamy: $\mathbf{A} \models \varphi$ wtw $\mathbf{B} \models \varphi$.

Naszym celem będzie kombinatoryczna charakteryzacja n-równoważności struktur. Zajmować się będziemy przypadkiem sygnatur *czysto relacyjnych*, czyli takich, w których nie występują symbole funkcyjne ani stałe indywiduowe.

Definicja 3.11.3. Niech $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ będą strukturami czysto relacyjnej sygnatury σ i niech $p\colon X \to B$, gdzie $X \subseteq A$. Mówimy, że p jest *częściowym izomorfizmem* z A w B, jeśli:

- p jest różnowartościowe,
- dla każdego symbolu $R^k \in \sigma$ i każdych $a_1, \ldots, a_k \in \operatorname{dom} p$:

$$(a_1, \ldots, a_k) \in R^{\mathbf{A}} \text{ wtw } (p(a_1), \ldots, p(a_k)) \in R^{\mathbf{B}}.$$

Definicja 3.11.4. Niech $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ będą strukturami czysto relacyjnej sygnatury σ. Dla $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ definiujemy *n-rundową grę Ehrenfeuchta-Fraïsségo* $G_n(\mathbf{A}, \mathbf{B})$
Gra dwu graczy: Spoiler i Duplikator. Gra trwa n rund. W i-tej rundzie Spoiler wybiera jakiś element $a_i \in A$ bądź $b_i \in B$. Duplikator odpowiada, wybierając odpowiednio $b_i \in B$ lub $a_i \in A$. Spoiler wygrywa, jeśli dla pewnego $k \leqslant n$ otrzymane po zakończeniu k-tej rundy przekształcenie $a_1 \mapsto b_1, \ldots, a_k \mapsto b_k$ nie jest częściowym izomorfizmem z A w B. W przeciwnym wypadku wygrywa Duplikator.

Definicja 3.11.5. Dla $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, struktury $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ są *n-izmomorficzne* (ozn. $\mathbf{A} \simeq_n \mathbf{B}$), jeśli Duplikator ma strategie wygrywajacą w $G_n(\mathbf{A}, \mathbf{B})$.

Twierdzenie 3.11.6 (twierdzenie Ehrenfeuchta-Fraïsségo)**.** *Niechi $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ będą strukturami skończonej, czysto relacyjnej sygnatury σ. Wtedy dla każdego $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{A} \equiv_n \mathbf{B}$ wtw $\mathbf{A} \simeq_n \mathbf{B}$.*

Dowód. ($\Leftarrow$) Załóżmy, że $\mathbf{A} \not\equiv_n \mathbf{B}$. Spoiler gra zachowując następujący niezmiennik:

$$\text{jeśli minęło } k \text{ rund, to istnieje formuła } \psi(x_1, \ldots, x_k) \text{ taka, że } \operatorname{qr}(\psi) \leqslant n - k,$$
$$\text{ale } \mathbf{A} \models \psi[a_1, \ldots, a_k] \text{ wtw } \mathbf{B} \not\models \psi[b_1, \ldots, b_k].$$

Na mocy założenia niezmiennik jest spełniony dla $k = 0$. Sprawdzimy, że jeśli jest spełniony dla danego $k < n$, to Spoiler może zagwarantować jego spełnienie dla $k + 1$. Niech $\psi(x_1, \ldots, x_k)$ będzie formułą rangi $\leqslant n - k$ świadczącą o spełnieniu niezmiennika dla k. Na mocy definicji spełniania dla spójników i praw De Morgana dla kwantyfikatorów możemy bez utraty ogólności przyjąć, że ψ jest postaci $\exists x_{k+1}\, \varphi$, gdzie $\operatorname{qr}(\varphi) \leqslant n - k - 1$. Jeśli ψ jest spełnione w $\mathbf{B}$, ale nie w $\mathbf{A}$ (drugi przypadek jest symetryczny), to Spoiler w rundzie $k + 1$ wybiera $b_{k+1} \in \mathbf{B}$ takie, że $\mathbf{B} \models \varphi[b_1/x_1, \ldots, b_k/x_k, b_{k+1}/x_{k+1}]$. Duplikator nie może znaleźć analogicznego elementu w A, więc niezależnie od wyboru $a_{k+1} \in A$ dostaniemy $\mathbf{A} \not\models \varphi[b_1/x_1, \ldots, b_k/x_k, b_{k+1}/x_{k+1}]$, czyli niezmiennik będzie nadal spełniony.
Po n rundach mamy formułę bezkwantyfikatorową ψ taką, że $\mathbf{A} \models \psi[a_1, \ldots, a_n]$ wtw $\mathbf{B} \not\models \psi[b_1, \ldots, b_n]$, z czego łatwo wywnioskować (korzystając z relacyjności sygnatury), że przekształcenie $a_1 \mapsto b_1, \ldots, a_n \mapsto b_n$ nie jest częściowym izomorfizmem.
($\Rightarrow$) Przez indukcję po $i \in \mathbb{N}$ zdefiniujmy teraz dla dowolnego $m \in \mathbb{N}$, oraz dowolnych $a_1, \ldots, a_m \in A$ formułę $\varphi_{\bar{a}}^{\mathbf{A},i}(x_1, \ldots, x_m)$: *typ rangi i krotki $\bar{a}$ w strukturze* $\mathbf{A}$. Jednocześnie sprawdzimy, że dla danych i, m możliwych typów rangi i krotek długości m jest skończenie wiele, a ponadto że $\operatorname{qr}(\varphi_{\bar{a}}^{\mathbf{A},i}) = i$.

$$\varphi_{\bar{a}}^{\mathbf{A},0}(x_1, \ldots, x_m) \coloneqq \bigwedge_{\substack{R^\ell \in \sigma, \\ j_1, \ldots, j_\ell \leqslant m: \\ (a_{j_1}, \ldots, a_{j_\ell}) \in R^{\mathbf{A}}}} R(x_{j_1}, \ldots, x_{j_\ell}) \wedge \bigwedge_{\substack{R^\ell \in \sigma, \\ j_1, \ldots, j_\ell \leqslant m: \\ (a_{j_1}, \ldots, a_{j_\ell}) \notin R^{\mathbf{A}}}} \neg R(x_{j_1}, \ldots, x_{j_\ell}) \wedge \bigwedge_{\substack{j_1, j_2 \leqslant m: \\ a_{j_1} = a_{j_2}}} x_{j_1} = x_{j_2} \wedge \bigwedge_{\substack{j_1, j_2 \leqslant m: \\ a_{j_1} \neq a_{j_2}}} \neg x_{j_1} = x_{j_2}.$$

Zauważmy, że $\varphi_{\bar{a}}^{\mathbf{A},0}$ jest poprawnie określoną formułą (rangi kwantyfikatorowej 0), gdyż sygnatura σ jest skończona. Zauważmy też, że możliwych typów rangi 0 krotek długości m jest skończenie wiele — każdy taki typ jest wyznaczony przez to, które elementy krotki są sobie równe i które ze skończenie wielu relacji zachodzą między którymi elementami krotki.

$$\varphi_{\bar{a}}^{\mathbf{A},i+1}(\bar{x}) := \bigwedge_{d\in A} \exists y\, \varphi_{\bar{a},d}^{\mathbf{A},i}(\bar{x},y) \wedge \forall\, y \bigvee_{d\in A} \varphi_{\bar{a},d}^{\mathbf{A},i}(\bar{x},y).$$

Zauważmy, że na mocy założenia, iż jest tylko skończenie wiele możliwych typów rangi i krotek długości $m+1$, koniunkcja i alternatywa po $d\in A$ są w istocie skończone, niezależnie od mocy A. Korzystając z założenia indukcyjnego łatwo sprawdzić, że typy rangi $i+1$ są faktycznie formułami rangi kwantyfikatorowej $i+1$ i że dla ustalonej długości krotki możliwych typów rangi $i+1$ jest skończenie wiele (jest ich co najwyżej tyle, ile podzbiorów zbioru wszystkich typów rangi i krotek długości o jeden większej).

Przystępujemy teraz do właściwego dowodu implikacji $(\Rightarrow)$ w tezie twierdzenia. Załóżmy, że Załóżmy, że $\mathbf{A} \equiv_n \mathbf{B}$. Duplikator gra zachowując niezmiennik:

$$\text{po } k \text{ rundach, } \mathbf{B} \models \varphi_{a_1,\ldots,a_k}^{\mathbf{A},n-k}[b_1,\ldots,b_k].$$

Niezmiennik jest spełniony dla $k=0$. Sprawdzimy, że jeśli jest spełniony dla danego $k<n$, to Duplikator może zagwarantować jego spełnienie dla $k+1$:

- Załóżmy, że Spoiler wybiera $a_{k+1}\in A$. Mamy

$$\mathbf{B} \models \bigwedge_{d\in A} \exists y\, \varphi_{a_1,\ldots,a_k,d}^{\mathbf{A},n-k-1}(x_1,\ldots,x_k,y)[b_1/x_1,\ldots,b_n/x_n],$$

  a zatem w szczególności

$$\mathbf{B} \models \exists y\, \varphi_{a_1,\ldots,a_k,a_{k+1}}^{\mathbf{A},n-k-1}(x_1,\ldots,x_k,y)[b_1/x_1,\ldots,b_n/x_n].$$

  Duplikator wybiera świadka na kwantyfikator $\exists y$ w tej formule jako b_{k+1}.

- Załóżmy, że Spoiler wybiera $b_{k+1}\in B$. Mamy

$$\mathbf{B} \models \forall y \bigvee_{d\in A} \varphi_{a_1,\ldots,a_k,d}^{\mathbf{A},n-k-1}(x_1,\ldots,x_k,y)[b_1/x_1,\ldots,b_k/x_k],$$

  a zatem

$$\mathbf{B} \models \bigvee_{d\in A} \varphi_{a_1,\ldots,a_k,d}^{\mathbf{A},n-k-1}(x_1,\ldots,x_k,y)[b_1/x_1,\ldots,b_k/x_k,b_{k+1}/y].$$

  Duplikator wybiera $d\in A$ świadczące o spełnieniu powyższej alternatywy jako a_{k+1}.

Po n rundach mamy $\mathbf{B} \models \varphi_{a_1,\ldots,a_n}^{\mathbf{A},0}[b_1,\ldots,b_n]$, z czego łatwo wywnioskować, że przekształcenie $a_1\mapsto b_1,\ldots,a_n\mapsto b_n$ jest częściowym izomorfizmem. □

Wniosek 3.11.7 (z dowodu)**.** *Jeśli* $\mathbf{B} \models \varphi_{\varnothing}^{\mathbf{A},i}$*, to* $\mathbf{B} \equiv_i \mathbf{A}$*. Jeśli* $\mathbf{B} \models \varphi_{a_1,\ldots,a_k}^{\mathbf{A},i}[b_1,\ldots,b_k]$*, to dla każdej formuły* $\psi(x_1,\ldots,x_k)$ *rangi* $\leqslant i$ *zachodzi* $\mathbf{A} \models \psi[a_1,\ldots,a_k]$ *wtw* $\mathbf{B} \models \psi[b_1,\ldots,b_k]$*.*

Wniosek 3.11.8. *Dla danych m, i istnieje tylko skończenie wiele nierównoważnych formuł rangi i nad zmiennymi $x_1, \ldots, x_m$.*

Uwaga.
- Jeśli sygnatura jest nieskończona, to może być tak, że Spoiler wygrywa np. w pierwszym ruchu nawet jeśli stuktury są n-równoważne. Aby uzyskać prawidłową charakteryzację n-równoważności, trzeba grać na reduktach do skończonych fragmentów sygnatury.
- Jeśli w sygnaturze są stałe indywiduowe, to można odpowiednio uogólnić pojęcie częściowego izomorfizmu (dla każdej $a \in \operatorname{dom} p$, $a = c^{\mathbf{A}}$ wtw $p(a) = c^{\mathbf{B}}$), a następnie uogólnić twierdzenie Ehrenfeuchta-Fraïsségo, traktując elementy interpretujące stałe jako ruchy „już wykonane" przed rozpoczęciem właściwej gry.
- Obecność funkcji w sygnaturze powoduje, że nawet skomplikowane zależności mogą się wyrażać formułami rangi kwantyfikatorowej 0. Można zastapić funkcje ich wykresami (relacjami), otrzymując z danej struktury $\mathbf{A}$ wersję relacyjną $\mathbf{A}^{\mathrm{rel}}$. To zmienia rangi kwantyfikatorowe formuł, ale $\mathbf{A}^{\mathrm{rel}} \equiv \mathbf{B}^{\mathrm{rel}}$ wtw $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$.

Przykład. 1. Niech σ będzie sygnaturą pustą, $\mathbf{A}_n = \{1, \ldots, n\}$, $\mathbf{B}_n = \{1, \ldots, n+1\}$. Duplikator wygrywa $G_n(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, czyli $\mathbf{A} \equiv_n \mathbf{B}$ (oczywiście $\mathbf{A} \not\equiv_{n+1} \mathbf{B}$). Wynika z tego, że własność „uniwersum struktury ma parzystą liczbę elementów" nie wyraża się w logice I rzędu.

2. Niech $(A, \leqslant^{\mathbf{A}})$, $(B, \leqslant^{\mathbf{B}})$ gęste liniowe porządki bez końców. Wtedy Duplikator wygrywa grę $G_\infty((A, \leqslant^{\mathbf{A}}), (B, \leqslant^{\mathbf{B}}))$. Wynika z tego między innymi, że $(A, \leqslant^{\mathbf{A}}) \equiv (B, \leqslant^{\mathbf{B}})$, a zatem DLO (teoria gęstych liniowych porządków bez końców) jest teorią zupełną (T jest *zupełna*, jeśli dla każdego zdania ψ zachodzi $T \models \psi$ lub $T \models \neg\psi$).
(Skądinąd $\simeq_\infty$ jest znacznie mocniejsze niż $\equiv$; w szczególności, dwie przeliczalne struktury będące w relacji $\simeq_\infty$ są izomorficzne — ćwiczenie).

3.12. Eliminacja kwantyfikatorów

Definicja 3.12.1. Teoria T ma eliminację kwantyfikatorów, jeśli dla każdej formuły φ istnieje formuła bezkwantyfikatorowa ψ taka, że $T \vdash \forall \bar{x}\, (\varphi \Leftrightarrow \psi)$ gdzie $FV(\varphi), FV(\psi) \subseteq \{\bar{x}\}$.

Uwaga. Na ogół możemy po prostu wymagać, by $FV(\psi) \subseteq FV(\varphi)$. Jedynym wyjątkiem jest sytuacja, gdy φ jest zdaniem, a w sygnaturze nie ma stałych, w związku z czym nie istnieją zdania bez kwantyfikatorów.

W wielu przypadkach własność eliminacji kwantyfikatorów ma interesujące konsekwencje. Jeśli na przykład rozumiemy strukturę zbiorów definiowalnych w jakimś modelu T za pomocą formuł bezkwantyfikatorowych, to na mocy eliminacji kwantyfikatorów rozumiemy strukturę wszystkich zbiorów definiowalnych w tym modelu. W pewnych ważnych przypadkach eliminacja kwantyfikatorów umożliwia również wywnioskowanie, że T jest zupełna bądź że T jest *rozstrzygalna* (tj. istnieje algorytm, który dla danego zdania ψ rozstrzyga, czy $T \models \psi$). W ogólności jednak teorie mające eliminację kwantyfikatorów mogą być dowolnie trudne do zrozumienia, o czym świadczy następujący przykład ostrzegawczy.

Stwierdzenie 3.12.2. *Niech T będzie teorią w sygnaturze σ. Istnieje teoria $T^+ \supseteq T$ (w pewnej sygnaturze rozszerzającej σ) taka, że:*

- *T^+ ma eliminację kwantyfikatorów,*
- *jeśli ψ jest zdaniem sygnatury σ, to $T^+ \models \psi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $T \models \psi$.*

Dowód. Dla każdego $n \geqslant 1$ i każdej formuły $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ sygnatury σ wprowadźmy do sygnatury nowy n-argumentowy symbol relacyjny R_φ. Niech T^+ składa się z wszystkich aksjomatów T oraz dodatkowo zdań

$$\forall \bar{x}\, (\varphi(\bar{x}) \Leftrightarrow R_\varphi(\bar{x}))$$

dla wszystkich φ z pierwotnej sygnatury. □

Uwaga. Konstrukcję zastosowaną w dowodzie stwierdzenia 3.12.2 nazywa się czasem, od nazwiska Michaela Morleya, *morleyizacją* teorii.

Twierdzenie 3.12.3. DLO[3] *ma eliminację kwantyfikatorów.*

Dowód. Za pomocą gier Ehrenfeuchta-Fraïsségo uzasadniliśmy już, że DLO jest teorią zupełną. W celu udowodnienia eliminacji kwantyfikatorów wystarczy więc sprawdzić, że dla każdego $n \geqslant 1$ i każdej formuły $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ istnieje formuła bezkwantyfikatorowa $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ taka, że

$$(\mathbb{Q}, \leqslant) \models \forall \bar{x}\, (\varphi(\bar{x}) \Leftrightarrow \psi(\bar{x})).$$

Zauważmy, że jeśli $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{Q}$ i zachodzi $(\mathbb{Q}, \leqslant) \models \varphi_{\bar{a}}^{\mathbf{A},0}[\bar{b}]$ (co jest równoważne temu, że dla $i, j = 1, \ldots, n$ $a_i \leqslant a_j$ wtw $b_i \leqslant b_j$, to (używając np. argumentu w stylu gier) można skonstruować automorfizm $(\mathbb{Q}, \leqslant)$ taki, że $a_1 \mapsto b_1, \ldots, a_n \mapsto b_n$. Twierdzimy teraz, że dana formuła $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ jest równoważna bezkwantyfikatorowej formule

$$\bigvee_{\substack{\bar{a} \in \mathbb{Q}: \\ (\mathbb{Q}, \leqslant) \models \varphi[\bar{a}]}} \varphi_{\bar{a}}^{(\mathbb{Q}, \leqslant),0}(x_1, \ldots, x_n).$$

(Jak zwykle, powyższa alternatywa jest w istocie skończona, bo dla ustalonej długości krotki jest skończenie wiele typów rangi 0. Jeśli φ definiuje w $(\mathbb{Q}, \leqslant)$ zbiór pusty, to alternatywa jest pusta, a zatem niespełnialna, i można ją utożsamić np. z formułą $x_1 \neq x_1$.)
Istotnie, jeśli $(\mathbb{Q}, \leqslant) \models \varphi[\bar{b}]$, to formuła $\varphi_{\bar{b}}^{(\mathbb{Q}, \leqslant),0}(\bar{x})$ jest jednym z członów alternatywy powyżej. Jeśli z kolei

$$(\mathbb{Q}, \leqslant) \models \bigvee_{\substack{\bar{a} \in \mathbb{Q}: \\ (\mathbb{Q}, \leqslant) \models \varphi[\bar{a}]}} \varphi_{\bar{a}}^{(\mathbb{Q}, \leqslant),0}[\bar{b}],$$

to dla pewnej krotki $\bar{a}$ spełniającej φ istnieje automorfizm $(\mathbb{Q}, \leqslant)$ taki, że $\bar{a} \mapsto \bar{b}$. Wynika z tego, że również $(\mathbb{Q}, \leqslant) \models \varphi[\bar{b}]$. □

[3] Dla przypomnienia: DLO to teoria gęstych liniowych porządków bez końców.

Udowodnimy teraz ogólne teoriomodelowe kryterium charakteryzujące teorie mające eliminację kwantyfikatorów.

Twierdzenie 3.12.4. *Dla dowolnej teorii T następujące warunki są równoważne:*

(1) T ma eliminację kwantyfikatorów,

(2) dla dowolnych $\mathbf{A}, \mathbf{B} \models T$, dowolnej struktury $\mathbf{D}$ takiej, że $\mathbf{D} \subseteq \mathbf{A}$, $\mathbf{D} \subseteq \mathbf{B}$, dowolnej bezkwantyfikatorowej formuły $\varphi(\bar{x}, y)$, dowolnej krotki $\bar{d} \in \mathbf{D}$, jeśli $\mathbf{B} \models \exists y\, \varphi[\bar{d}/\bar{x}]$, to $\mathbf{A} \models \exists y\, \varphi[\bar{d}/\bar{x}]$.

Dowód. (1) $\Rightarrow$ (2) Jeśli formuła $\exists y\, \varphi(\bar{x}, y)$ jest równoważna T formule bezkwantyfikatorowej $\psi(\bar{x})$, to z $\mathbf{B} \models \exists y\, \varphi[\bar{d}/\bar{x}]$ wynika $\mathbf{B} \models \psi[\bar{d}]$. Ponieważ ψ nie ma kwantyfikatorów, otrzymujemy $\mathbf{D} \models \psi[\bar{d}]$ i $\mathbf{A} \models \psi[\bar{d}]$, z czego wynika ostatecznie $\mathbf{A} \models \exists y\, \varphi[\bar{d}/\bar{x}]$. (Zauważmy, że ten argument działa dla dowolnej formuły równoważnej w T formule bezkwantyfikatorowej, nie tylko dla $\exists y\, \varphi(\bar{x}, y)$.)

(2) $\Rightarrow$ (1) Załóżmy, że zachodzi warunek (2). Zauważmy, że w celu udowodnienia (1) wystarczy pokazać, że każda formuła postaci $\exists y\, \varphi(\bar{x}, y)$ dla φ bez kwantyfikatorów jest równoważna formule bezkwantyfikatorowej: dowolną formułę można bowiem wówczas sprowadzić do preneksowej postaci normalnej i eliminować kwantyfikatory jeden po drugim, zaczynając od wewnętrznych.

Niech więc ξ będzie postaci $\exists y\, \varphi(\bar{x}, y)$ dla φ bezkwantyfikatorowej; bez utraty ogólności załóżmy, że krotka $\bar{x}$ nie jest pusta. Niech

$$\Gamma(\bar{x}) := \{\gamma(\bar{x}) : \gamma \text{ bezkwantyfikatorowa i } T \models \forall \bar{x}\, (\xi(\bar{x}) \Rightarrow \gamma(\bar{x}))\}\,.$$

Rozważmy nowe stałe $\bar{c}$ w liczbie odpowiadającej długości krotki $\bar{x}$: dla uproszczenia będziemy pisać $\xi(\bar{c})$ zamiast $\xi\left({}^{\bar{c}}/_{\bar{x}}\right)$ i analogicznie dla innych formuł. Twierdzimy, że wystarczy pokazać, iż $T + \Gamma(\bar{c}) \models \xi(\bar{c})$. Istotnie, na mocy twierdzenia o zwartości otrzymamy wtedy

$$T \cup \{\gamma_1(\bar{c}), \dots, \gamma_k(\bar{c})\} \models \xi(\bar{c})$$

dla pewnych $\gamma_1(\bar{x}), \dots, \gamma_k(\bar{x}) \in \Gamma(\bar{x})$. Z tego wynika następnie $T \models \bigwedge_{i=1}^{k} \gamma_i(\bar{c}) \Rightarrow \xi(\bar{c}))$. Ponieważ stałe $\bar{c}$ nie występują w sygnaturze teorii T, otrzymamy $T \models \forall \bar{x} \left(\bigwedge_{i=1}^{k} \gamma_i(\bar{x}) \Rightarrow \xi(\bar{x})\right)$ i w konsekwencji $T \models \forall \bar{x} \left(\bigwedge_{i=1}^{k} \gamma_i(\bar{x}) \Leftrightarrow \xi(\bar{x})\right)$.

Będziemy więc dążyli do pokazania, że $T + \Gamma(\bar{c}) \models \xi(\bar{c})$. Weźmy dowolną strukturę $\mathbf{A} \models T + \Gamma(\bar{c})$. Niech $\bar{d} := \bar{c}^{\mathbf{A}}$ i niech $\mathbf{D}$ będzie podstrukturą $\mathbf{A}$ generowaną przez $\bar{d}$. Mamy zatem $\mathbf{D} \subseteq \mathbf{A} \models T + \neg\exists y\, \varphi[\bar{d}/\bar{x}]$. Pokażemy teraz, że istnieje $\mathbf{B}$ takie, że $\mathbf{D} \subseteq \mathbf{B}$ i $\mathbf{B} \models T + \exists y\, \varphi[\bar{d}/\bar{x}]$, co na mocy warunku (2) da nam $\mathbf{A} \models \exists y\, \varphi[\bar{d}/\bar{x}]$ i tym samym zakończy dowód. Wystarczy pokazać, że teoria $T + \mathrm{Diag}(\mathbf{D}) + \xi(\bar{c})$ jest niesprzeczna; zakładamy tu, że w $\mathrm{Diag}(\mathbf{D})$ nadal używamy właśnie stałych $\bar{c}$ na oznaczenie elementów $\bar{d}$ (możemy tak zrobić, ponieważ stałe $\bar{c}$ nie występują w T).

Załóżmy nie wprost, że teoria $T + \mathrm{Diag}(\mathbf{D}) + \xi(\bar{c})$ jest jednak sprzeczna. Dostajemy wówczas

$$T \models \xi(\bar{c}) \Rightarrow \neg \bigwedge_{i=1}^{k} \gamma_i(\bar{c}, e_1, \dots, e_\ell),$$

gdzie zdania γ_i należą do $\mathrm{Diag}(\mathbf{D})$, a stałe e_j oznaczają pewne elementy $D \setminus \bar{d}$. Skoro $\mathbf{D}$ jest strukturą generowaną przez $\bar{d}$, to dla każdego $j = 1, \ldots, \ell$ element oznaczony przez e_j jest postaci $t_j^{\mathbf{D}}[\bar{d}]$ dla pewnego termu t_j.
Ponieważ stałe $\bar{c}, \bar{e}$ nie występują w T, możemy wywnioskować

$$T \models \forall \bar{x}\, \forall \bar{y} \left[\xi(\bar{x}) \Rightarrow \neg \bigwedge_{i=1}^{k} \gamma_i(\bar{x}, y_1, \ldots, y_\ell) \right]$$

i w konsekwencji

$$T \models \forall \bar{x} \left[\xi(\bar{x}) \Rightarrow \neg \bigwedge_{i=1}^{k} \gamma_i(\bar{x}, t_1(\bar{x}), \ldots, t_\ell(\bar{x})) \right].$$

Formuła $\neg \bigwedge_{i=1}^{k} \gamma_i(\bar{x}, t_1(\bar{x}), \ldots, t_\ell(\bar{x}))$, jako bezkwantyfikatorowa konsekwencja $\xi(\bar{x})$, jest więc elementem zbioru $\Gamma(\bar{x})$. Oznacza to, że

$$\mathbf{A} \models \neg \bigwedge_{i=1}^{k} \gamma_i(\bar{c}, t_1(\bar{c}), \ldots, t_\ell(\bar{c})),$$

a zatem również

$$\mathbf{D} \models \neg \bigwedge_{i=1}^{k} \gamma_i(\bar{x}, t_1(\bar{x}), \ldots, t_\ell(\bar{x}))[\bar{d}/\bar{x}]$$

i w rezultacie

$$\mathbf{D} \models \neg \bigwedge_{i=1}^{k} \gamma_i(\bar{x}, \bar{y})[\bar{c}/\bar{x}, t_1^{\mathbf{D}}[\bar{d}]/y_1, \ldots, t_\ell^{\mathbf{D}}[\bar{d}]/y_\ell].$$

Z drugiej jednak strony wiemy, że każde ze zdań $\gamma_i(\bar{c}, e_1, \ldots, e_\ell)$ należy do $\mathrm{Diag}(\mathbf{D})$, co oznacza, iż

$$\mathbf{D} \models \bigwedge_{i=1}^{k} \gamma_i(\bar{x}, \bar{y})[\bar{d}/\bar{x}, t_1^{\mathbf{D}}[\bar{d}]/y_1, \ldots, t_\ell^{\mathbf{D}}[\bar{d}]/y_\ell].$$

Sprzeczność.

$\square$

Zajmiemy się teraz nieco bardziej skomplikowanym przykładem eliminacji kwantyfikatorów: arytmetyką dodawania w zbiorze liczb całkowitych (bądź naturalnych).

Definicja 3.12.5. Arytmetyka Presburgera Pr to teoria w sygnaturze $\{+, -, \leqslant, 0, 1\}$, gdzie $-$ jest jednoargumentowym symbolem funkcyjnym. Pr ma następujące aksjomaty:

(1) aksjomaty uporządkowanych grup abelowych,
(2) $0 < 1$,
(3) $\forall x\, (x \leqslant 0 \vee 1 \leqslant x)$,

(4n) dla $\mathbb{N} \ni n \geqslant 2$ aksjomatem jest

$$\forall x \left(\bigvee_{r=0}^{n-1} \left[\exists y \left(\underbrace{y + \cdots + y}_{n \text{ razy}} = x + \underbrace{1 + \cdots + 1}_{r} \right) \wedge \bigwedge_{r \neq \ell \leqslant n-1} \neg \exists y \left(\underbrace{y + \cdots + y}_{n} = x + \underbrace{1 + \cdots + 1}_{\ell} \right) \right] \right).$$

Jak można spostrzec, aksjomat (4n) mówi (w języku samego dodawania), że możliwe jest dzielenie z resztą przez n.

Sformułowana powyżej teoria Pr nie ma eliminacji kwantyfikatorów. W szczególności formuła $\exists y\,(y + y = x)$, orzekająca parzystość elementu x, nie jest równoważna formule bezkwantyfikatorowej. Sytuacja zmienia się, gdy do sygnatury dodamy nowe predykaty jednoargumentowe P_n dla $n \geqslant 2$, a do teorii dodamy aksjomaty

(5n) $\forall x\,(P_n(x) \Leftrightarrow \exists y\,(\underbrace{y + \cdots + y}_{n} = x))$.

Tak rozszerzoną teorię będziemy oznaczać przez $\overline{\mathrm{Pr}}$.

Uwaga. Każdy model Pr jest reduktem jednoznacznie wyznaczonego modelu $\overline{\mathrm{Pr}}$.

Twierdzenie 3.12.6. *Teoria* $\overline{\mathrm{Pr}}$ *ma eliminację kwantyfikatorów.*

Dowód. Użyjemy kryterium z twierdzenia 3.12.4. Niech $\mathbf{A}, \mathbf{B} \models \overline{\mathrm{Pr}}$ i niech $\mathbf{D}$ takie, że mamy $\mathbf{D} \subseteq \mathbf{A}$ i $\mathbf{D} \subseteq \mathbf{B}$. Rozważmy formułę bezkwantyfikatorową $\varphi(\bar{x}, y)$ taką, że dla pewnej krotki $\bar{d} \in D$ zachodzi $\mathbf{B} \models \exists y\, \varphi[\bar{d}/\bar{x}]$. Korzystając z postaci DNF dla φ oraz rozdzielności $\exists$ względem $\vee$ możemy założyć, że φ jest koniunkcją atomów i negacji atomów. Co więcej, możemy nawet założyć, że w φ nie występują negacje atomów. Istotnie:

- $\neg t \leqslant s$ jest na mocy aksjomatów $\overline{\mathrm{Pr}}$ równoważne $s + 1 \leqslant t$,
- $\neg t = s$ jest równoważne $(s + 1 \leqslant t) \vee (t + 1 \leqslant s)$, możemy więc ponownie użyć rozdzielności $\vee$ względem $\exists$,
- $\neg P_n(t)$ jest równoważne $P_n(t + 1) \vee \cdots \vee P_n(t + \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n-1})$.

Zakładamy więc, że φ jest koniunkcją atomów. Każdy z tych atomów może mieć jedną z trzech postaci:

(i) $t = s$. Dla ustalonych $\bar{d}$ jest to równoważne $\underbrace{y + \cdots + y}_{n} = e$ dla pewnych $n \in \mathbb{N}$ i $e \in D$.

(ii) $t \leqslant s$. Dla ustalonych $\bar{d}$ każdy taki atom jest równoważny $e \leqslant y + \cdots + y$ bądź $y + \cdots + y \leqslant e$ dla pewnego $e \in D$. Koniunkcja takich atomów jest równoważna pewnej parze nierówności postaci $e_1 \leqslant \underbrace{y + \cdots + y}_{n} \leqslant e_2$ dla pewnych $n \in \mathbb{N}$, $e_1 \in D \cup \{-\infty\}$, $e_2 \in D \cup \{+\infty\}$.

(Symbole $\pm\infty$ służą zaznaczeniu, że koniunkcja nierówności w φ może nie implikować żadnych dolnych bądź górnych ograniczeń na y.)

(iii) $P_n(t)$. Dla ustalonych d taki atom jest równoważny $P_n(y+\dots+y+\underbrace{1+\dots+1}_{k})$ dla pewnego $k \in \{0,\dots,n-1\}$. Koniunkcja takich atomów jest równoważna *alternatywie* warunków postaci $P_m(y+\underbrace{1+\dots+1}_{\ell})$ dla pewnych $m \in \mathbb{N}$ i $\ell \in \{0,\dots,m-1\}$. Korzystając raz jeszcze z rozdzielności $\vee$ względem $\exists$, możemy założyć, że w φ występuje dokładnie jeden warunek tego typu. (Może się zdarzyć, że będzie to trywialnie spełniony warunek podzielności przez $m=1$.)

Jeśli w φ występuje człon typu (i), to $(\frac{e}{n})^{\mathbf{B}}$ istnieje i $\mathbf{B} \models \varphi\left[\bar{d}/\bar{x}, (\frac{e}{n})^{\mathbf{B}}/y\right]$. Wtedy $\mathbf{D} \models P_n[e]$, czyli musi istnieć $(\frac{e}{n})^{\mathbf{A}}$ i można sprawdzić, że $\mathbf{A} \models \varphi\left[\bar{d}/\bar{x}, (\frac{e}{n})^{\mathbf{A}}/y\right]$.
Jeśli nie ma członu typu (i), to patrzymy na warunek otrzymany z członów typu (ii). Jeśli różnica $e_2 - e_1$ jest skończona, to dla dowolnego świadka na kwantyfikator $\exists y$ w $\mathbf{B}$, element $\underbrace{y+\dots+y}_{n}$ musi być jednym ze skończenie wielu elementów $e_1, e_1+1, \dots, e_1+\underbrace{1+\dots+1}_{e_2-e_1}$, z których każdy należy do D. Niech e oznacza taki element D, dla którego $\mathbf{B} \models \varphi\left[\bar{d}/\bar{x}, (\frac{e}{n})^{\mathbf{B}}/y\right]$. Rozumujemy wówczas jak poprzednio: $\mathbf{D} \models P_n[e]$, czyli istnieje $(\frac{e}{n})^{\mathbf{A}}$ i sprawdza się, że $\mathbf{A} \models \varphi\left[\bar{d}/\bar{x}, (\frac{e}{n})^{\mathbf{A}}/y\right]$.
Jeśli natomiast różnica $e_2 - e_1$ jest nieskończona, a co za tym idzie, nieskończony jest (zarówno w $\mathbf{B}$, jak i w $\mathbf{A}$) przedział $[\lceil e_1/n \rceil, \lfloor e_2/n \rfloor]$, to skoro w przedziale $[\lceil e_1/n \rceil, \lfloor e_2/n \rfloor]^{\mathbf{B}}$ jest element spełniający warunek z (iii), analogiczny element spełniający ten warunek można też znaleźć w $[\lceil e_1/n \rceil, \lfloor e_2/n \rfloor]^{\mathbf{A}}$. $\square$

Wniosek 3.12.7. *Teorie* Pr *i* $\overline{\text{Pr}}$ *są zupełne, czyli* $\text{Pr} = \text{Th}(\mathbb{Z}, +, -, \leqslant, 0, 1)$.

Dowód. Każde zdanie bezkwantyfikatorowe w sygnaturze $\overline{\text{Pr}}$ jest dowodliwe w $\overline{\text{Pr}}$ bądź sprzeczne z $\overline{\text{Pr}}$. Eliminacja kwantyfikatorów dla $\overline{\text{Pr}}$ pociąga więc za sobą zupełność $\overline{\text{Pr}}$, z której z kolei wynika – na mocy uwagi po definicji $\overline{\text{Pr}}$ – zupełność Pr. $\square$

Wniosek 3.12.8. *Każdy podzbiór $X \subseteq \mathbb{N}$ definiowalny w $(\mathbb{N}, +)$ jest ostatecznie okresowy, to znaczy istnieją $k \in \mathbb{N}, \ell \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ takie, że dla wszystkich $n \geqslant k$ zachodzi: $n \in X$ wtw $n + \ell \in X$.*

Dowód. Zbiór $\mathbb{N}$ jest definiowalny w $(\mathbb{Z}, +, -, \leqslant, 0, 1)$, więc każdy podzbiór $\mathbb{N}$ definiowalny w $(\mathbb{N}, +)$ jest definiowalny w $(\mathbb{Z}, +, -, \leqslant, 0, 1)$. Nietrudno sprawdzić, że każdy podzbiór $\mathbb{Z}$ definiowalny bezkwantyfikatorową formułą sygnatury $\overline{\text{Pr}}$ jest ostatecznie okresowy. $\square$

Wniosek 3.12.9. *Relacja $\{(n, m, k) \in \mathbb{N}^3 : n \cdot m = k\}$ nie jest definiowalna w $(\mathbb{N}, +)$.*

Dowód. Gdyby mnożenie było definiowalne w $(\mathbb{N}, +)$, to definiowalny byłby też zbiór $\{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$, który nie jest ostatecznie okresowy. $\square$

Wniosek 3.12.10. *Teoria* Pr *jest* rozstrzygalna*, czyli istnieje algorytm, który na wejściu ψ, gdzie ψ jest zdaniem, rozstrzyga, czy* $\text{Pr} \models \psi$.

Dowód. Teoria Pr jest zupełna, a ponadto można algorytmicznie rozstrzygać, czy dany ciąg znaków jest aksjomatem Pr, a więc również czy dany ciąg znaków jest dowodem w Pr. Algorytm przeszukuje wszystkie dowody w Pr, aż znajdzie dowód ψ bądź dowód $\neg\psi$. □

Przykład. Na zakończenie wspomnijmy jeszcze o dwu innych ważnych teoriach mających eliminację kwantyfikatorów:

1. ACF, czyli teoria ciał algebraicznie domkniętych. Z eliminacji kwantyfikatorów dla ACF wynika między innymi rozstrzygalność ACF i zupełność teorii $\mathrm{ACF}_{\mathrm{p}}$, czyli ACF rozszerzonej o aksjomat(y) ustalający/e wartość charakterystyki. W języku geometrii algebraicznej eliminacja kwantyfikatorów oznacza, że zbiory definiowalne w ciele algebraicznie domkniętym to dokładnie kombinacje boolowskie zbiorów algebraicznych (zdefiniowanych układem równań wielomianowych). Wynika stąd na przykład, że obraz kombinacji boolowskiej zbiorów algebraicznych względem przekształcenia wielomianowego jest również kombinacją boolowską zbiorów algebraicznych.
2. RCF, czyli teoria ciał uporządkowanych rzeczywiście domkniętych: takich ciał uporządkowanych, w których każdy element nieujemny jest kwadratem, a każdy wielomian stopnia nieparzystego ma pierwiastek. Eliminacja kwantyfikatorów dla RCF pociąga za sobą rozstrzygalność i zupełność RCF. Z tego w szczególności wynika, że $\mathrm{RCF} = \mathrm{Th}(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, \leqslant)$, a także to, że każdy definiowalny w $\mathrm{Th}(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, \leqslant)$ podzbiór $\mathbb{R}$ jest skończoną sumą przedziałów. Struktury uporządkowane o tak ubogiej rodzinie definiowalnych podzbiorów uniwersum nazywają się strukturami *o-minimalnymi* i mają wiele ciekawych własności. Rozstrzygalność RCF jest z kolei interesująca m.in. dlatego, że w RCF można sformułować bardzo wiele stwierdzeń z zakresu elementarnej geometrii euklidesowej, których prawdziwość można w związku z tym (przynajmniej teoretycznie) sprawdzać algorytmicznie.

3.13. Twierdzenia Gödla – pogadanka

Dzięki eliminacji kwantyfikatorów możemy pokazać, że zarówno $\mathrm{Th}(\mathbb{N}, +, 0, 1, \leqslant)$, która jest prostym wariantem Arytmetyki Presburgera, jak i $\mathrm{Th}(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, \leqslant)$, czyli teoria RCF, mają stosunkowo przejrzystą aksjomatykę i są rozstrzygalne. Pokażemy teraz, że $\mathrm{Th}(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1, \leqslant)$ ma zupełnie inne własności, a w szczególności wspominana wcześniej Arytmetyka Peano nie aksjomatyzuje $\mathrm{Th}(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1, \leqslant)$. Wynika to z rezultatów zwanych niekiedy twierdzeniami limitacyjnymi, takich jak *twierdzenia Gödla o niezupełności*. Naszkicujemy teraz dowody twierdzeń Gödla i niektórych wyników pokrewnych – choć podanie wszystkich szczegółów dowodowych zajęłoby zbyt dużo miejsca, to główne idee dowodów są dość łatwe do opisania.
Przypomnijmy, że Arytmetyka Peano, czyli PA, to teoria w sygnaturze $\{\leqslant, +, \cdot, 0, 1\}$ mająca następujące aksjomaty:

- aksjomaty części nieujemnej pierścienia dyskretnie uporządkowanego,

- aksjomat indukcji:

$$\forall \bar{y}\, (\varphi(0, \bar{y}) \wedge \forall x\, (\varphi(x, \bar{y}) \Rightarrow \varphi(x+1, \bar{y}) \Rightarrow \forall x\, \varphi(x, \bar{y}))\,,$$

  osobno dla każdej formuły $\varphi(x, \bar{y})$.

Pierwszą grupę aksjomatów, tj. aksjomaty części nieujemnej pierścienia dyskretnie uporządkowanego będziemy oznaczać przez PA^-.
Kluczowe znaczenie będzie miał dla nas następujący fakt:

Fakt 3.13.1. *Istnieje formuła z trzema zmiennym wolnymi w języku PA, którą oznaczymy przez $x^y = z$, dowodliwie w PA spełniająca wszystkie podstawowe własności oczekiwane od wykresu funkcji wykładniczej. Innymi słowy, PA dowodzi, że:*

(i) $\forall x\, \forall y\, \exists^{=1} z\, (x^y = z)$,
(ii) $\forall x\, (x^0 = 1 \wedge x^1 = x)$,
(iii) $\forall x\, \forall y_1\, \forall y_2\, (x^{y_1+y_2} = x^{y_1} \cdot x^{y_2})$,
(iv) $\forall x\, \forall y_1\, \forall y_2\, (x^{y_1 y_2} = (x^{y_1})^{y_2})$.

(Ściśle rzecz biorąc, skoro w języku PA nie dysponujemy termem na oznaczenie funkcji wykładniczej, warunek (iii) należałoby zapisać $\forall x\, \forall y_1\, \forall y_2\, \forall z_1\, \forall z_2\, (x^{y_1} = z_1 \wedge x^{y_2} = z_2 \Rightarrow x^{y_1+y_2} = z_1 z_2)$ i analogicznie dla (iv).) W szczególności, w modelu standardowym formuła $x^y = z$ definiuje dokładnie wykres funkcji wykładniczej.
Dowód faktu 3.13.1 pominiemy całkowicie. Znane dowody tego faktu są w miarę elementarne (choć pomysłowe), ale zarazem są żmudne. Dwa z nich można znaleźć np. w rozdziałach I.1 i V.3 książki P. Hájka i P. Pudláka *Metamathematics of First-Order Arithmetic*.
Niech teraz $x \mathrel{\widetilde{\in}} y$ oznacza formułę

$$\exists z\, \exists w \left[\left(z = 0 \vee 2^{x+1} | z\right) \wedge \left(w \leqslant 2^{x-1}\right) \wedge y = z + 2^x + w\right]$$

(gdzie zapisy typu $2^{x+1}|z$ czy $w \leqslant 2^{x-1}$ są oczywiście skrótami notacyjnymi dla formuł w języku PA dotyczących podzielności czy porównywania stosownych liczb). Intuicyjnie, $x \mathrel{\widetilde{\in}} y$ mówi, że x-ty bit zapisu dwójkowego liczby y wynosi 1. Okazuje się, iż PA dowodzi, że $\widetilde{\in}$ spełnia wszystkie aksjomaty teorii mnogości ZFC oprócz aksjomatu nieskończoności ($\widetilde{\in}$ spełnia jego negację). Mówimy, że PA *interpretuje* teorię

$$\mathrm{ZFC} \setminus \{\text{aksjomat nieskończoności}\} \cup \{\neg\text{aksjomat nieskończoności}\}^{4}$$

za pomocą interpretacji, w której formułę atomową $x \in y$ języka teorii mnogości tłumaczymy na formułę $x \mathrel{\widetilde{\in}} y$ języka PA.

[4] Pomijamy tu pewne niezbyt istotne na naszym poziomie szczegółowości niuanse, związane z tym, że aby opisana tu teoria była tym, o co nam chodzi, tj. teorią mnogości zbiorów skończonych, należałoby użyć nieco innej aksjomatyki ZFC niż podana przez nas – równoważnej w obecności aksjomatu nieskończoności, ale nieco silniejszej, jeśli tego aksjomatu brakuje.

Możliwość zinterpretowania „teorii mnogości obiektów skończonych” ma następującą bardzo ważną konsekwencję: w PA można swobodnie mówić o skończonych zbiorach czy skończonych ciągach liczb i ogólniej o skończonych obiektach kombinatorycznych. Dzięki temu można w PA wyrazić wiele faktów dotyczących obliczeń i obliczalności.

„Definicja” 3.13.2. Funkja $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ jest obliczalna, jeśli isnieje algorytm, który na wejściu $n_1, \ldots, n_k$ zwraca $f(n_1, \ldots, n_k)$. Relacja $R \in \mathbb{N}^k$ jest *obliczalna* (bądź: *rozstrzygalna*), jeśli jej funkcja charakterystyczna jest obliczalna.

Żeby „definicja” obliczalności stała się definicją w sensie matematycznym, należałoby uściślić pojęcie „istnieje algorytm” za pomocą jakiegoś dobrze zdefiniowanego modelu obliczeń, np. maszyn Turinga, maszyn rejestrowych albo składni jakiegoś języka programowania. Okazuje się jednak, że po pierwsze, jest to możliwe, a po drugie, wszystkie rozsądne definicje *istnienia* algorytmu są ze sobą równoważne.

Fakt 3.13.3. *Niech $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ będzie funkcją obliczalną. Wtedy istnieje formuła $\varphi_f(x_1, \ldots, x_k, y)$ reprezentująca f w PA^-, w następującym sensie: dla dowolnych $n_1, \ldots, n_k, \ell \in \mathbb{N}$,*

- *jeśli $f(n_1, \ldots, n_k) = \ell$, to $\mathrm{PA}^- \vdash \varphi_f(\underline{n_1}, \ldots, \underline{n_k}, \underline{\ell})$,*
- *jeśli $f(n_1, \ldots, n_k) \neq \ell$, to $\mathrm{PA}^- \vdash \neg\varphi_f(\underline{n_1}, \ldots, \underline{n_k}, \underline{l})$*

(notacja $\underline{m}$ oznacza term postaci $\underbrace{1 + \cdots + 1}_{m}$ dla $m \neq 0$ bądź 0 dla $m = 0$).

Dla relacji obliczalnej R istnieje formuła $\varphi_R(x_1, \ldots, x_k)$ taka, że:

- *jeśli $(n_1, \ldots, n_k) \in R$, to $\mathrm{PA}^- \vdash \varphi_R(\underline{n_1}, \ldots, \underline{n_k})$,*
- *jeśli $(n_1, \ldots, n_k) \notin R$ to $\mathrm{PA}^- \vdash \neg\varphi_R(\underline{n_1}, \ldots, \underline{n_k})$.*

Ważnym spostrzeżeniem Kurta Gödla, znacznie mniej oczywistym w jego czasach (a dokładniej w okolicach 1930 r.) niż obecnie, było to, że można dokonać tak zwanej (później) *Gödelizacji* składni, tj. ciągom znaków języka logiki I rzędu danej skończonej sygnatury przypisać liczby naturalne w taki sposób, żeby typowym operacjom składniowym odpowiadały proste (a w szczególności: obliczalne, czyli reprezentowalne w PA^-) operacje na liczbach.
Liczbę przypisaną danemu ciągowi znaków s nazywa się *numerem Gödla* ciągu s i niekiedy oznacza przez $\ulcorner s \urcorner$. Przykładowo, w konkretnym przypadku sygnatury PA możemy przyjąć, że wszystkie termy, formuły itp. tej sygnatury to skończone ciągi znaków z listy:

$$\wedge, \neg, \forall, =, (,), \mathbf{v}, ', \leqslant, +, \cdot, 0, 1$$

(gdzie zmienną będzie dowolny ciąg złożony z symbolu $\mathbf{v}$ i jakiejś, być może zerowej, liczby primów $'$). Powyższym 13 symbolom możemy przypisać kolejne liczby od 0 do 12. Dalej możemy rozszerzyć Gödelizację na wszystkie ciągi znaków za pomocą kodowania skończonych ciągów liczb jako pojedynczych liczb jako liczb danego przez interpretację skończonej teorii mnogości w PA. (A jeśli wolimy, to możemy po prostu traktować liczby jako ciągi znaków za pomocą zapisu 13-kowego – albo 14-kowego, jeśli lubimy ciągi zaczynające się od $\wedge\wedge\ldots\wedge$ i martwimy się kwestią wiodących zer. Takie szczegóły nie mają większego znaczenia.)

Przykład. Zwróćmy uwagę, że 0, $\ulcorner 0 \urcorner$ i $\ulcorner \underline{\ulcorner 0 \urcorner} \urcorner$ to trzy różne liczby: 0 to po prostu 0, $\ulcorner 0 \urcorner$ to liczba przypisana pojedynczemu symbolowi zera, czyli, powiedzmy, 11, a $\ulcorner \underline{\ulcorner 0 \urcorner} \urcorner$ to już całkiem duża liczba przypisana ciągowi, w którym występuje 11 jedynek, 10 plusów i odpowiednio wiele nawiasów.

Zapis $\ulcorner \underline{0} \urcorner$ oznacza natomiast to samo co $\ulcorner 0 \urcorner$, bo term $\underline{0}$ to jest pojedynczy symbol zera. Z kolei $\ulcorner 2 \urcorner$ nie ma oczywistego sensu, bo nie ma termu 2, ale $\ulcorner \underline{2} \urcorner$ niewątpliwie ma sens – jest to numer Gödla ciągu $(1+1)$.

Przykład. Następujące relacje/operacje na numerach Gödla są obliczalne, a zatem reprezentowalne w PA^-:

- x jest zmienną
  [tj.: jest numerem Gödla zmiennej, czyli ciągu znaków złożonego z symbolu $\mathbf{v}$ i primów],
- x jest termem,
- x jest formułą,
- z jest koniunkcją formuł x i y,
- $\mathrm{subst}(x,y) = \begin{cases} \ulcorner \varphi(t/\mathbf{v}) \urcorner & \text{jeśli } x = \ulcorner \varphi(\mathbf{v}) \urcorner \text{ oraz } y = \ulcorner t \urcorner, \\ & \quad \text{gdzie } t \text{ jest termem podstawialnym za } \mathbf{v} \text{ w } \varphi(\mathbf{v}), \\ 0 & \text{wpp,} \end{cases}$
- $\mathrm{name}(x) = \ulcorner \underline{x} \urcorner$
  [dla ujednoznacznienia: wartość funkcji name na argumencie x to numer Gödla termu postaci $\underbrace{1 + \cdots + 1}_{x \text{ razy}}$],
- $\mathrm{Prov}_T(x,y) := y$ jest dowodem zdania x na podstawie T
  [ale tylko jeśli T jest teorią, której zbiór aksjomatów jest obliczalny] .

Dysponując formułą $\mathrm{Prov}_T\ (x,y)$, możemy napisać $\mathrm{Pr}_T(x) = \exists y\, \mathrm{Prov}_T(x,y)$, czyli "$x$ jest dowodliwy w T". Należy podkreślić, że dowodliwość w T *nie* jest już w ogólności własnością obliczalną, nawet jeśli zbiór aksjomatów T jest obliczalny.

Wymóg posiadania obliczalnego zbioru aksjomatów jest w oczywisty sposób spełniony przez każdą teorię skończenie aksjomatyzowalną, ale również przez teorie takie jak PA czy ZFC, które nie są skończenie aksjomatyzowalne, ale mają skończenie wiele *schematów* aksjomatów. A priori nie jest natomiast oczywiste, czy obliczalną aksjomatykę ma teoria dana jako $\mathrm{Th}(\mathbf{A})$ dla jakiejś struktury $\mathbf{A}$, choć wiemy już, że tak jest dla $(\mathbb{N}, +, 0, 1, \leqslant)$, $(\mathbb{Q}, \leqslant)$ i $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, \leqslant)$.

Możemy teraz przystąpić do właściwych dowodów twierdzeń limitacyjnych. Istotną rolę odgrywa w nich następujący fakt:

Twierdzenie 3.13.4 (Lemat przekątniowy *vel* lemat Gödla o punkcie stałym)**.** *Niech $\varphi(x)$ będzie formułą z jedną zmienną wolną w sygnaturze rozszerzającej sygnaturę* PA*. Wtedy istnieje zdanie ψ takie, że* $\mathrm{PA}^- \vdash \psi \Leftrightarrow \varphi\left(\underline{\ulcorner \psi \urcorner}\right)$.

Dowód. Rozważmy formułę $\xi(x) \coloneqq \varphi(\mathrm{subst}(x, \mathrm{name}(x)))$, gdzie do funkcji subst i name odwołujemy się za pomocą formuł reprezentujących je w PA^-. Niech $k = \ulcorner\xi(\mathbf{v})\urcorner$ i niech ψ będzie zdaniem $\xi(\underline{k}/\mathbf{v})$, czyli $\varphi(\mathrm{subst}(\underline{k}, \mathrm{name}(\underline{k})))$.
Zauważmy, że ψ jest zdaniem powstającym z podstawienia za jedyną zmienną wolną w formule $\xi(\mathbf{v})$, mającej numer Gödla k, termu $\underline{k}$, który ma numer Gödla $\mathrm{name}(k)$. Innymi słowy, $\ulcorner\psi\urcorner = \mathrm{subst}(k, \mathrm{name}(k))$. Skoro więc odwołujemy się do subst i name za pomocą formuł je reprezentujących, to

$$\mathrm{PA}^- \vdash \mathrm{subst}(\underline{k}, \mathrm{name}(\underline{k})) = \underline{\ulcorner\psi\urcorner}$$

i w konsekwencji

$$\mathrm{PA}^- \vdash \varphi(\mathrm{subst}(\underline{k}, \mathrm{name}(\underline{k}))) \Leftrightarrow \varphi(\underline{\ulcorner\psi\urcorner}).$$

Ale $\varphi(\mathrm{subst}(\underline{k}, \mathrm{name}(\underline{k})))$ to właśnie ψ! $\square$

Twierdzenie 3.13.5 (Tarskiego o niedefiniowalności prawdy)**.** *Niech T będzie teorią rozszerzającą* PA^- *i niech $\mathbf{A} \models T$. Nie istnieje formuła* $\mathrm{Tr}(x)$ *w sygnaturze teorii T taka, że dla każdego zdania ψ tej samej sygnatury zachodzi $\mathbf{A} \models \psi \Leftrightarrow \mathrm{Tr}\left(\underline{\ulcorner\psi\urcorner}\right)$.*

Dowód. Załóżmy, że dla pewnego $\mathbf{A} \models T$ formuła $\mathrm{Tr}(x)$ jak wyżej istnieje. Na mocy lematu przekątniowego istnieje zdanie ψ takie, że $T \vdash \psi \Leftrightarrow \neg\mathrm{Tr}\left(\underline{\ulcorner\psi\urcorner}\right)$. Ale wówczas $\mathbf{A} \models \psi \Leftrightarrow \neg\psi$, więc otrzymujemy sprzeczność. $\square$

Uwaga. W szczególności wynika z tego, że PA i teorie ją rozszerzające w skończonym języku nie mają eliminacji kwantyfikatorów, bo istnieje formuła definiująca własność „x jest numerem Gödla prawdziwego zdania bezkwantyfikatorowego”).

Jako niemal natychmiastowy wniosek z twierdzenia Tarskiego otrzymujemy:

Twierdzenie 3.13.6 (Pierwsze twierdzenie Gödla, wersja minimalistyczna)**.** $\mathrm{Th}(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1, \leqslant)$ *nie ma aksjomatyzacji, w której zbiór aksjomatów jest obliczalny. W szczególności,* PA *nie jest logicznie równoważna* $\mathrm{Th}(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1, \leqslant)$.

Dowód. Gdyby T było taką aksjomatyzacją, to formuła $\mathrm{Pr}_T(x)$ i struktura $\mathbf{A} \coloneqq (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1, \leqslant)$ przeczyłyby twierdzeniu Tarskiego. $\square$

Oryginalne rozumowania Gödla korzystało, dla danej teorii T o obliczalnym zbiorze aksjomatów, z uzyskanego dzięki lematowi przekątniowemu zdania γ (zwanego później często *zdaniem Gödla* dla T) takiego, że $\mathrm{PA}^- \vdash \gamma \Leftrightarrow \neg\,\mathrm{Pr}_T(\underline{\ulcorner\gamma\urcorner})$. Za jego pomocą można otrzymać:

Twierdzenie 3.13.7 (Pierwsze twierdzenie Gödla, wersja nieco słabsza od oryginału)**.** *Niech $T \supseteq \mathrm{PA}^-$ będzie teorią w skończonej sygnaturze mającą obliczalny zbiór aksjomatów. Niech γ będzie zdaniem Gödla dla T określonym j.w. Wówczas:*

(i) jeśli T jest niesprzeczna, to $T \nvdash \gamma$,
(ii) jeśli T jest prawdziwa w (pewnym wzbogaceniu) $(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1, \leqslant)$*, to $T \nvdash \neg\gamma$.*

Gödel ogłosił wynik nieco mocniejszy, w którym do niedowodliwości $\neg\gamma$ w punkcie (ii) wystarczał syntaktyczny warunek zwany ω-niesprzecznością T, istotnie słabszy niż prawdziwość w modelu standardowym, ale silniejszy niż zwykła niesprzeczność.
Istnieją skądinąd niesprzeczne teorie rozszerzające PA (i mające obliczalny zbiór aksjomatów), które dowodzą negacji swojego zdania Gödla. Odnotujmy natomiast bez dowodu, że za pomocą pewnej modyfikacji zdania Gödla, zwanej czasem zdaniem Rossera, można wykazać niezupełność dowolnych niesprzecznych rozszerzeń PA o obliczalnej aksjomatyce.

Twierdzenie 3.13.8 (Rossera)**.** *Niech $T \supseteq \mathrm{PA}^-$ będzie niesprzeczną teorią w skończonej sygnaturze mającą obliczalny zbiór aksjomatów. Wówczas T jest niezupełna, tj. istnieje zdanie ρ takie, że $T \nvdash \rho$ i $T \nvdash \neg\rho$.*

Dla T jak wyżej, niech Con_T oznacza zdanie $\neg\,\mathrm{Pr}_T(\underline{\ulcorner 0 \neq 0 \urcorner})$. Zdanie Con_T jest więc naturalnym sformułowaniem tezy „$T \nvdash 0 \neq 0$”, czyli „T jest niesprzeczna”.

Twierdzenie 3.13.9 (Drugie twierdzenie Gödla)**.** . *Niech $T \supseteq \mathrm{PA}$ będzie niesprzeczną teorią w skończonej sygnaturze mającą obliczalny zbiór aksjomatów. Wówczas $T \nvdash \mathrm{Con}_T$.*

Innymi słowy, dostatecznie silne teorie o „dającej się zrozumieć” aksjomatyce nie dowodzą własnej niesprzeczności!
Pełnego dowodu drugiego twierdzenia Gödla nie będziemy przytaczać, jako że jest on dość techniczny. Idea jest jednak znów dość prosta: w dowodzie pierwszego twierdzenia pokazaliśmy, że jeśli T (mająca obliczalny zbiór aksjomatów i zawierajaca PA^-) jest niesprzeczna, to T nie dowodzi swojego zdania Gödla γ. Kiedy T jest na tyle silna, by móc wykazać pewne ogólne fakty na temat dowodliwości (wystarczy do tego PA, a w istocie jej niewielki fragment, ale nie sama PA^-), to jesteśmy w stanie odtworzyć to rozumowanie w T, czyli

$$T \vdash \mathrm{Con}_T \Rightarrow \neg\mathrm{Pr}_T(\underline{\ulcorner\gamma\urcorner}).$$

Ale $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\underline{\ulcorner\gamma\urcorner}) \Leftrightarrow \gamma$, a zatem $T \vdash \mathrm{Con}_T \Rightarrow \gamma$. Wiemy jednak z pierwszego twierdzenia, że $T \nvdash \gamma$, co pociąga za sobą $T \nvdash \mathrm{Con}_T$.
Jak wspomnieliśmy, istnieją niesprzeczne teorie rozszerzające PA i podlegające pierwszemu twierdzeniu Gödla, które dowodzą negacji swojego zdania Gödla γ. Taka teoria T wciąż jednak dowodzi $\mathrm{Con}_T \Rightarrow \gamma$, a zatem T, choć niesprzeczna, dowodzi własnej sprzeczności. (Siłą rzeczy, taka T nie może być spełniona w „prawdziwym świecie”, czyli w standardowym modelu arytmetyki.)

Uwaga. Zaznaczmy jeszcze, że choć powyżej dla uproszczenia formułowaliśmy twierdzenia limitacyjne dla teorii *rozszerzających* PA^- bądź PA, to jednak zachodzą one również dla teorii *interpretujących* odpowiednio PA^- bądź PA, nawet w sensie nieco luźniejszym niż ten, w którym PA intepretuje skończoną teorię mnogości. Przykładowo, ZFC interpretuje PA (bo jest w stanie zdefiniować zbiór liczb naturalnych oraz operacje na nim, które spełniają aksjomatykę PA), a zatem nie jest w stanie jedną formułą wyrazić „prawdziwości w uniwersum teoriomnogościowym” (w odróżnieniu od prawdziwości w danym modelu, którego uniwersum jest zbiorem, a nie klasą właściwą), nie dowodzi własnej niesprzeczności (jeśli tylko naprawdę jest niesprzeczna) itp.