Egzamin z logiki matematycznej
31 stycznia 2020

Zadanie 1. Udowodnij sekwent

$$\exists x\, \forall y\, \neg(R(y) \Rightarrow S(x)) \longrightarrow R(f(c))$$

w rachunku sekwentów. (R, S są jednoargumentowymi symbolami relacyjnymi, f jednoargumentowym symbolem funkcyjnym, a c stałą indywiduową.)

Zadanie 2.
(a) Załóżmy, że $S \subseteq \mathbb{Q}^2$ jest zbiorem takim, że $\langle \frac{1}{2}, 2\rangle \in S$, ale $\langle -\frac{2}{3}, 3\rangle \notin S$. Udowodnij, że zbiór S nie jest definiowalny bez parametrów w $(\mathbb{Q}, \leqslant)$.
(b) Niech $\mathbb{A} = (A, \leqslant^{\mathbb{A}})$ będzie gęstym liniowym porządkiem bez końców. Udowodnij, że istnieje dokładnie 8 podzbiorów A^2 definiowalnych bez parametrów w $\mathbb{A}$.

Zadanie 3. Niech $\mathcal{U}$ będzie ultrafiltrem niegłównym na $\mathbb{N}$ i niech $\mathbb{N}^*$ będzie ultrapotęgą ${(\mathbb{N}, +, \cdot)^{\mathbb{N}}}/{\mathcal{U}}$. Rozstrzygnij, czy w $\mathbb{N}^*$ istnieje:
(a) niezerowy element b taki, że dla każdego $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ istnieje $a \in \mathbb{N}^*$ spełniające $\mathbb{N}^* \models b = \underbrace{a + \ldots + a}_{n \text{ razy}}$.
(b) niezerowy element b taki, że dla każdego niezerowego $\ell \in \mathbb{N}^*$ istnieje $a \in \mathbb{N}^*$ spełniające $\mathbb{N}^* \models b = a \cdot \ell$.

Zadanie 4. Niech $\mathcal{K}$ będzie klasą struktur postaci $\mathbb{A} = (A, R^{\mathbb{A}})$, w których $R^{\mathbb{A}} \subseteq A^2$, a ponadto dla każdego $a \in A$ zbiór

$$\{b \in A : \langle a, b\rangle \in R^{\mathbb{A}}\}$$

jest skończony. Niech $\neg\mathcal{K}$ oznacza klasę złożoną z tych struktur $\mathbb{A} = (A, R^{\mathbb{A}})$, $R^{\mathbb{A}} \subseteq A^2$, które nie należą do $\mathcal{K}$.
(a) Rozstrzygnij, czy klasa $\mathcal{K}$ jest aksjomatyzowalna.
(b) Rozstrzygnij, czy klasa $\neg\mathcal{K}$ jest aksjomatyzowalna.

Zadanie 5. Rozstrzygnij, czy istnieje struktura $\mathbb{A} = (A, \leqslant^{\mathbb{A}})$ o następujących własnościach:
— $|A| = \mathfrak{c}$,
— $\mathbb{A} \equiv (\mathbb{N}, \leqslant)$,
— $\mathbb{A}$ ma podstrukturę $\mathbb{B}$ izomorficzną z $(\mathbb{R}, \leqslant)$ i zarazem taką, że pewne $a \in A$ spełnia $\mathbb{A} \models b < a$ dla wszystkich $b \in B$.

Zadanie 6. Niech $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ będą strukturami elementarnie równoważnymi. Udowodnij, że istnieją struktury $\mathbb{A}^+, \mathbb{B}^+$ takie, że $\mathbb{A} \preccurlyeq \mathbb{A}^+$, $\mathbb{B} \preccurlyeq \mathbb{B}^+$, a ponadto $\mathbb{A}^+$ i $\mathbb{B}^+$ są izomorficzne.

Exam in Mathematical Logic
January 31, 2020

Problem 1. Give a proof of the sequent

$$\exists x\, \forall y\, \neg(R(y) \Rightarrow S(x)) \longrightarrow R(f(c))$$

in sequent calculus. Here R, S are unary relation symbols, f a unary function symbol, and c is an individual constant.

Problem 2.

(a) Let $S \subseteq \mathbb{Q}^2$ be a set such that $\langle \frac{1}{2}, 2\rangle \in S$ but $\langle -\frac{2}{3}, 3\rangle \notin S$. Prove that the set S is not definable without parameters in $(\mathbb{Q}, \leqslant)$.

(b) Let $\mathbb{A} = (A, \leqslant^{\mathbb{A}})$ be a dense linear order without endpoints. Prove that there are exactly 8 subsets of A^2 definable without parameters in $\mathbb{A}$.

Problem 3. Let $\mathcal{U}$ be a non-principal ultrafilter on $\mathbb{N}$ and let $\mathbb{N}^*$ be the ultrapower ${(\mathbb{N}, +, \cdot)^{\mathbb{N}}}/{\mathcal{U}}$. Determine whether $\mathbb{N}^*$ contains:

(a) a non-zero element b such that for each $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ there exists $a \in \mathbb{N}^*$ for which $\mathbb{N}^* \models b = \underbrace{a + \ldots + a}_{n \text{ times}}$.

(b) a non-zero element b such that for each non-zero $\ell \in \mathbb{N}^*$ there exists $a \in \mathbb{N}^*$ for which $\mathbb{N}^* \models b = a \cdot \ell$.

Problem 4. Let $\mathcal{K}$ be the class of structures of the form $\mathbb{A} = (A, R^{\mathbb{A}})$ such that $R^{\mathbb{A}} \subseteq A^2$ and for each $a \in A$ the set

$$\{b \in A : \langle a, b\rangle \in R^{\mathbb{A}}\}$$

is finite. Let $\neg\mathcal{K}$ be the class of those structures $\mathbb{A} = (A, R^{\mathbb{A}})$, $R^{\mathbb{A}} \subseteq A^2$, which do not belong to $\mathcal{K}$.

(a) Determine whether $\mathcal{K}$ is an axiomatizable class.

(b) Determine whether $\neg\mathcal{K}$ is an axiomatizable class.

Problem 5. Determine whether there exists a structure $\mathbb{A} = (A, \leqslant^{\mathbb{A}})$ with the following properties:

— $|A| = \mathfrak{c}$,

— $\mathbb{A} \equiv (\mathbb{N}, \leqslant)$,

— $\mathbb{A}$ has a substructure $\mathbb{B}$ isomorphic to $(\mathbb{R}, \leqslant)$ and such that there exists $a \in A$ with $\mathbb{A} \models b < a$ for all $b \in B$.

Problem 6. Assume that the structures $\mathbb{A}$ and $\mathbb{B}$ are elementarily equivalent. Prove that there exist structures $\mathbb{A}^+, \mathbb{B}^+$ such that $\mathbb{A} \preccurlyeq \mathbb{A}^+$, $\mathbb{B} \preccurlyeq \mathbb{B}^+$, and $\mathbb{A}^+$ and $\mathbb{B}^+$ are isomorphic.