Egzamin z logiki matematycznej

30 stycznia 2015 r.

1. Znajdź formułę w preneksowej postaci normalnej logicznie równoważną formule:

$$\forall v \exists x [R(c, v) \land \forall x (R(x, v) \Rightarrow R(f(x), v)) \Rightarrow \forall x R(x, v)].$$

2. Znajdź moc algebry Lindenbauma $B(\emptyset)$ formuł logiki zdań zbudowanych za pomocą zmiennych zdaniowych z danego n-elementowego zbioru $\{p_1, \ldots, p_n\}$.

3. Udowodnij, że klasa tych struktur $\mathbb{A} = (A, f^{\mathbb{A}})$ (w sygnaturze z jednym jednoargumentowym symbolem funkcyjnym f), które mają następującą własność:

„dla każdego elementu $a \in A$ istnieje liczba naturalna $n > 0$ taka, że $(f^{\mathbb{A}})^n(a) = a$”,

nie jest zamknięta na ultraprodukty.
(Uwaga: jeśli $g : A \to A$, to $g^n : A \to A$ jest n-krotną iteracją funkcji g).

4. Niech σ będzie sygnaturą zawierającą dwa jednoargumentowe symbole relacyjne P, Q i jeden dwuargumentowy symbol relacyjny R (i nie zawierającą żadnych innych symboli). Czy dla każdej struktury $\mathbb{A}$ sygnatury σ takiej, że $P^{\mathbb{A}}, Q^{\mathbb{A}}$ i $R^{\mathbb{A}}$ są nieskończone:

(i) istnieje struktura $\mathbb{B}$ elementarnie równoważna z $\mathbb{A}$ i taka, że zbiór B jest mocy continuum, a ponadto $|P^{\mathbb{B}}| < |Q^{\mathbb{B}}|$?

(ii) istnieje struktura $\mathbb{B}$ elementarnie równoważna z $\mathbb{A}$ i taka, że zbiór B jest mocy continuum, a ponadto $|P^{\mathbb{B}}| = |Q^{\mathbb{B}}|$?

5. Niech T będzie teorią w języku z jednym dwuargumentowym symbolem relacyjnym E aksjomatyzowaną przez następujące zdania:

(i) „E jest relacją równoważności”,

(ii) $\forall y \exists x_1 \ldots \exists x_n [\bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant n} E(y, x_i) \land \bigwedge_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i \neq x_j]$, dla każdego $n \in \mathbb{N}$,

(iii) $\exists x_1 \ldots \exists x_n [\bigwedge_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \neg E(x_i, x_j)]$, dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Rozstrzygnij, czy T jest skończenie aksjomatyzowalna.

6. Niech T będzie teorią z poprzedniego zadania.

(a) Udowodnij, że T ma eliminację kwantyfikatorów,

(b) Niech teoria T^- różni się od T tylko brakiem aksjomatów typu (iii). Podaj przykład formuły, która nie jest równoważna w T^- żadnej formule bezkwantyfikatorowej.

Przypominamy o podawaniu **kompletnych i szczegółowych uzasadnień**.
Każde zadanie należy oddać na **oddzielnej, podpisanej** kartce.