Kolokwium z logiki matematycznej
4 stycznia 2010

1. Udowodnij w systemie dedukcji naturalnej: $\vdash (\neg p \wedge (p \vee q)) \to q$.

2. Niech $\mathbb{A} = (A, \leqslant^{\mathbb{A}})$, gdzie $A = \{\langle n, k\rangle \in \mathbb{N}^2 : n \geqslant k\}$, a relacja $\leqslant^{\mathbb{A}}$ jest zadana warunkiem:

$$\langle n, k\rangle \leqslant^{\mathbb{A}} \langle n', k'\rangle \Leftrightarrow (n = n' \wedge k \leqslant k').$$

Pokaż, że istnieje struktura $\mathbb{B} \equiv \mathbb{A}$, która ma podstrukturę izomorficzną z $(\mathbb{R}, \leqslant)$.

3. Pokaż, że relacja

$$\{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 : y \geqslant x^2\}$$

nie jest definiowalna bez parametrów w strukturze $(\mathbb{R}, +, \leqslant)$.

4. Napisz (porządnie!) zdanie φ w języku algebr Boole'a (tj. $\langle +, \cdot, -, 0, 1\rangle$) prawdziwe w $\mathbb{A}$, a fałszywe w $\mathbb{B}$, gdzie:

- $\mathbb{A}$ to algebra skończonych i koskończonych podzbiorów $\mathbb{N}$,
- $\mathbb{B}$ to $\mathbb{B}_\emptyset$, czyli algebra Lindenbauma teorii pustej (nad przeliczalnym zbiorem zmiennych zdaniowych).