Egzamin z logiki matematycznej, część pierwsza
27 stycznia 2010

1. Znajdź:

(a) formułę w postaci CNF logicznie równoważną formule:

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \Big((\neg s \Rightarrow (s \Rightarrow p)) \wedge r\Big),$$

(b) formułę w preneksowej postaci normalnej logicznie równoważną formule:

$$\forall x\Big(\neg R(x,v) \Rightarrow \exists y S(x,y)\Big) \Rightarrow \exists y \forall x\Big(\neg R(x,v) \Rightarrow \exists v(\neg R(v,y) \wedge S(x,v))\Big).$$

2. Udowodnij, że istnieje przeliczalna struktura dla języka $\{+, \leqslant\}$, która jest elementarnie równoważna $\langle \mathbb{Q}, +, \leqslant \rangle$, ale nie jest izomorficzna z $\langle \mathbb{Q}, +, \leqslant \rangle$.

3. Podzbiór D algebry Boole'a $\mathbb{B} = \langle B, +, \cdot, -, 0, 1 \rangle$ nazywamy *gęstym*, jeśli dla każdego $0 < b \in B$ istnieje $0 < d \in D$ t. że $d \leqslant b$.

Niech $\{D_n : n \in \mathbb{N}\}$ będzie przeliczalną rodziną gęstych podzbiorów $\mathbb{B}$. Udowodnij, że w $\mathbb{B}$ istnieje ultrafiltr $\mathcal{U}$ t. że dla każdego n, $\mathcal{U} \cap D_n \neq \emptyset$.

Egzamin z logiki matematycznej, część druga
27 stycznia 2010

4. Sprawdź, czy następujące formuły są tautologiami:

(a) $\forall y(P(f(y)) \vee R(y)) \Rightarrow \exists x \forall y(P(x) \vee R(y))$,

(b) $\exists x \forall y(P(x) \vee R(y)) \Rightarrow \forall y(P(f(y)) \vee R(y))$

(P, R to jednoargumentowe symbole relacyjne, f to jednoargumentowy symbol funkcyjny).

5. Niech $\mathcal{K}$ będzie klasą tych porządków częściowych, w których istnieje nieskończony łańcuch. Rozstrzygnij, czy $\mathcal{K}$ jest aksjomatyzowalna.