Zadania przygotowawcze do kolokwium z logiki matematycznej rok akademicki 2008/9

0. Należy się spodziewać jednego lub więcej zadań nt. prawdziwości czy spełnialności, w stylu "zbadaj, czy zdanie prawdziwe/fałszywe w danej strukturze", "znajdź strukturę, w której dane zdanie prawdziwe/fałszywe", "znajdź zdanie różniące dane dwie struktury" (lub to samo dla spełniania formuł z wartościowaniami jako dodatkową komplikacją), zbadaj tautologiczność, zbadaj definiowalność/aksjomatyzowalność danej klasy struktur itp. Poniżej nie umieściłem zbyt wielu takich zadań, ale całe mnóstwo można znaleźć na liście zadań z logiki prof. Pawła Urzyczyna (dostępnej na jego stronie, jak również na stronie prof. Zakrzewskiego). Bardzo polecam przyjrzenie się tej liście, a szczególnie przerobienie paru zadań z przedziału 54–124.

Niezłym źródłem zadań jest też podręcznik Adamowicz-Zbierski, a także oczywiście stare egzaminy.

1. Pokaż, że $\{\Leftrightarrow, \neg\}$ nie jest zupełnym zbiorem spójników.

2. Pokaż, że trójargumentowy spójnik "jeśli, to, jeśli nie, to" nie jest zupełny, ale zbiór {jeśli, to, jeśli nie, to; $\neg$} jest zupełnym zbiorem spójników. (gdzie "jeśli p, to q, jeśli nie p, to r" jest fałszem w dwu przypadkach: gdy p jest prawdą, a q fałszem, lub gdy p jest fałszem, a r prawdą.)

3. (Lemat Craiga o interpolacji dla logiki zdań) Załóżmy, że

$$\models \varphi(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_m) \Rightarrow \psi(q_1, \ldots, q_m, r_1, \ldots, r_k)$$

(w nawiasach podana jest lista wszystkich zmiennych zdaniowych występujących w danej formule). Pokaż, że istnieje pewna formuła $\eta(q_1, \ldots, q_m)$ t. że $\models \varphi \Rightarrow \eta$ i $\models \eta \Rightarrow \psi$.

4. Podaj postać CNF formuły $((p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$. Podaj postać CNF zdania "jeśli p, to q, jeśli nie, to r". Ogólnie, podaj postaci CNF i DNF rozmaitych formuł zdaniowych.

5. Przypominajka: graf to para uporządkowana $G = (V, E)$, gdzie V to (niekoniecznie skończony) zbiór *wierzchołków* grafu, a E to zbiór dwuelementowych pozdbiorów V, zwanych krawędziami grafu. Jeśli $\{u, v\} \in E$, mówimy, że u i v są połączone krawędzią.

Graf jest k-kolorowalny, jeśli można pokolorować jego wierzchołki k kolorami w ten sposób, że dowolne dwa wierzchołki połączone krawędzią mają różne kolory. Pokaż, że jeśli każdy skończony podgraf grafu G jest k-kolorowalny, to cały G też.

6. Scharakteryzuj automorfizmy $(\mathbb{Z}, \leqslant)$, $(\mathbb{Z}, +)$.

7. Czy istnieje automorfizm $(\mathbb{R}, \leqslant)$ nie będący funkcją ciągłą $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

8. Słowniczek algebr Boole'a: $a \in \mathbb{B}$ jest *atomem*, jeśli $a > 0$ i nie istnieje c t. że $a > c > 0$. Algebra $\mathbb{B}$ jest *atomowa*, jeśli poniżej dowolnego $b > 0$ istnieje atom, *bezatomowa*, jeśli w ogóle nie ma atomów. $\mathbb{B}$ jest zupełna, jeśli dla każdego zbioru elementów B istnieje kres dolny i kres górny w $\mathbb{B}$.

Pokaż, że każda algebra skończona jest atomowa i zupełna. Znajdź przykład algebry atomowej nieskończonej, bezatomowej, zupełnej nieskończonej, niezupełnej.

9. Czy algebra Boole'a może mieć dokładnie 6 elementów? A 32? A 48?

10. Podaj przykład algebry Boole'a (i) izomorficznej ze swoją właściwą podalgebrą, (ii) izomorficznej ze swoim ilorazem przez nietrywialną kongruencję.

11. Niech $T = \{p_1, p_2, \ldots\}$. Opisz algebrę Lindenbauma $\mathbb{B}_T$ nad zbiorem zmiennych $\{q, p_1, p_2, \ldots\}$ (wsk.: $\mathbb{B}_T$ jest skończona).

12. Pokaż, że ultraprodukt (dowolnej długości) struktur, z których każda ma moc co najwyżej k ($k \in \mathbb{N}$), jest skończony. Pokaż, że ultraprodukt struktur skończonych nie musi być skończony.

13. Podaj przykład zdania prawdziwego w $(\mathbb{Q}, \leqslant, +, \cdot, 0, 1)$, a fałszywego w $(\mathbb{R}, \leqslant, +, \cdot, 0, 1)$.

Zadania 14–16 zawierają pewną część algebraiczną, której stopień trudności, skądinąd nieprzesadnie wielki, rośnie (chyba) wraz z numerem zadania.

14. Grupa $(G, \cdot)$ nazywa się *beztorsyjna*, jeśli dla każdego elementu $g \neq e$ i niezerowego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $g^n \neq e$. Pokaż, że klasa grup beztorsyjnych jest aksjomatyzowalna, ale nie skończenie aksjomatyzowalna (tj. definiowalna).

15. Grupa abelowa $(G,+)$ nazywa się *podzielna*, jeśli dla każdego $g \in G$ i niezerowego $n \in \mathbb{N}$ istnieje $h \in G$ t. że $nh = g$ (gdzie nh to $h + \ldots + h$ z n wystąpieniami h). Pokaż, że klasa grup podzielnych jest aksjomatyzowalna, ale nie skończenie aksjomatyzowalna.

16. Pokaż, że klasa ciał algebraicznie domkniętych jest aksjomatyzowalna, ale nie skończenie aksjomatyzowalna. Wywnioskuj, że klasa ciał nie będących algebraicznie domkniętymi nie jest aksjomatyzowalna.

17. W ultrapotędze $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$, $\mathcal{U}$ niegłówny, wskaż element podzielny przez wszystkie (prawdziwe, tj. skończone) liczby pierwsze.

18. Pokaż, że dodawanie nie jest definiowalne w strukturze $(\mathbb{R}, \leqslant)$, tj. nie istnieje formuła $\varphi(x,y,z)$ t. że dla dowolnych $r,s,t, \in \mathbb{R}$, $(\mathbb{R}, \leqslant) \models \varphi(r,s,t)$ wtw $r+s=t$.

Można to wzmocnić i pokazać, że dodawanie nie jest nawet definiowalne z parametrami, tj. nie istnieją takie $p_1, \ldots, p_k \in \mathbb{R}$ i formuła $\varphi(x,y,z,w_1,\ldots,w_k)$, że dla dow. r,s,t, $(\mathbb{R}, \leqslant) \models \varphi(r,s,t,p_1,\ldots,p_k)$ wtw $r+s=t$.

19. Opisz wszystkie podzbiory $\mathbb{R}$ definiowalne (z/bez parametrów) w strukturze $(\mathbb{R}, \leqslant)$. Opisz wszystkie podzbiory $\mathbb{R}$ definiowalne z parametrami w strukturze $(\mathbb{R}, \leqslant, +, \cdot, 0, 1)$.

20. Podaj przykład zdania φ (sygnatura do wyboru), które jest fałszywe w dowolnej strukturze mocy parzystej, ale dla każdego $n \in \mathbb{N}$, jest prawdziwe w pewnej strukturze mocy $2n+1$.

21. (z dawnego egzaminu u prof. Urzyczyna). Niech ψ_n będzie zdaniem

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n (R(x_1,x_2) \vee R(x_2,x_3) \vee \ldots \vee R(x_{n-1},x_n) \vee R(x_n,x_1)).$$

Dla jakich $n,m \geqslant 1$ zdanie $\psi_n \Rightarrow \psi_m$ jest tautologią?