Egzamin z logiki matematycznej, część pierwsza
28 stycznia 2009

1. Niech $\mathbb{B}_\emptyset$ będzie algebrą Lindenbauma teorii pustej nad przeliczalnym zbiorem zmiennych zdaniowych $\{p_1, p_2, \ldots\}$. Pokaż, że w $\mathbb{B}_\emptyset$ jest dokładnie continuum ultrafiltrów.

2. Udowodnij, że dla każdej nieskończonej struktury relacyjnej w danej przeliczalnej sygnaturze istnieje przeliczalna struktura elementarnie równoważna (w tej samej sygnaturze) taka, że nie wszystkie elementy jej uniwersum są elementami wyróżnionymi (tzn. interpretacjami stałych indywiduowych wyjściowej sygnatury).

3. Sprawdź, czy następująca formuła jest tautologią:

$$\big(\forall x R(x) \Rightarrow \exists y S(y)\big) \Rightarrow \exists y \big(R(y) \Rightarrow \exists x S(x)\big)$$

(R, S to jednoargumentowe symbole relacyjne).

Egzamin z logiki matematycznej, część druga
28 stycznia 2009

4. Niech $\mathcal{U}$ będzie niegłównym ultrafiltrem na $\mathbb{N}$ i niech $P \subseteq \mathbb{N}$ oznacza zbiór wszystkich liczb pierwszych. Pokaż, że dla dowolnego zbioru $X \subseteq P$ istnieje element $a_X \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$ podzielny przez wszystkie liczby pierwsze z X, ale niepodzielny przez żadną liczbę z $P \setminus X$.

5. Znajdź preneksową postać normalną formuły:

$$\exists x \neg \Big(\forall y \exists z \big(R(x,y,z) \wedge \exists x S(x,z,w)\big) \Rightarrow \exists y \forall z \big(R(x,z,y) \wedge \exists z S(z,y,w)\big)\Big).$$

(R, S to trzyargumentowe symbole relacyjne).

6. Pokaż, że nie istnieje zdanie φ w sygnaturze z jednym dwuargumentowym symbolem relacyjnym, które jest

- prawdziwe we wszystkich skończonych relacjach równoważności, mających parzyście wiele klas abstrakcji mocy parzystej (i być może jeszcze jakieś inne klasy abstrakcji),
- fałszywe we wszystkich skończonych relacjach równoważności, mających nieparzyście wiele klas abstrakcji mocy parzystej (i być może jeszcze jakieś inne klasy abstrakcji).