

Wstęp do przekładu I księgi *Elementów* Euklidesa

L. A. Kołodziejczyk, R. Szczepkowski

Euklides. O życiu Euklidesa wiadomo mało, do naszych czasów zachowały się bowiem tylko szczątki informacji o jego postaci. Z przekazów starożytnych wiemy niewiele ponad to, że był nieco młodszy od ostatnich uczniów Platona (Platon zmarł w 347 r. p.n.e.) i że żył za panowania króla egipskiego Ptolemeusza I (ok. 306 – 283 r. p.n.e.). Podejrzewa się, że uczył się od matematyków związanych z Akademią Platońską. Jest rzeczą znaną, że pod koniec życia Platona i po jego śmierci Akademia była silnym ośrodkiem matematycznym, skupiającym najważniejszych badaczy w tej dziedzinie: Eudoksosa z Knidos, Teajteta z Aten i Menajchmosa.

Euklides najprawdopodobniej nauczał matematyki w Aleksandrii, stąd nazywany bywa Euklidesem z Aleksandrii, dla odróżnienia od filozofa Euklidesa z Megary – ucznia Sokratesa.

Matematyka grecka przed Euklidesem. Sami Grecy (Herodot, Platon, Proklos), a za nimi część nowożytnych i współczesnych badaczy historii matematyki, uważali matematykę za wytwór egipski (geometria) bądź fenicki (arytmetyka), nie zaś za rodzime osiągnięcie. Dziś jednak, choć docenia się pewne praktyczne umiejętności Babilończyków, Egipcjan, Fenicjan w różnych dziedzinach związanych z rachunkami bądź geometrią, zdecydowanie przeważa pogląd, że największego przełomu dokonali sami Grecy. Stworzyli oni bowiem właściwie matematykę w naszym dzisiejszym sensie tego słowa, a przede wszystkim nadali jej charakter nauki teoretycznej. Właśnie Grecy wprowadzili też do matematyki metodę aksjomatyczno-dedukcyjną, której pomnikiem są *Elementy* Euklidesa.

Pierwszą wyraźnie zarysowaną, choć półlegendarną postacią matematyki greckiej jest **Tales z Miletu** (VII/VI w. p.n.e.). Przypisywano mu twierdzenia: o równości kątów wierzchołkowych, o równości kątów przy podstawie w trójkącie równoramiennym, o przystawaniu trójkątów mają-

cych dwa równe kąty oraz równy bok między nimi (kbc) oraz o tym, że średnica dzieli koło na dwie równe części. Niestety, wobec szczupłości źródeł, trudno oszacować wpływ Talesa na rozwój matematyki czy w szczególności metody aksjomatycznej.

Ważne osiągnięcia w badaniu arytmetyki mieli członkowie religijnej **sekty pitagorejczyków**, założonej przez kolejną postać półlegendarną — **Pitagorasa z Samos** (VI w. p.n.e.). Ze względu na anonimowość odkryć i śluby zachowania tajemnicy ich dorobek matematyczny nie daje się przypisać konkretnym osobom — trzeba go uznać za dokonanie wspólnoty. Rozważania matematyczne i muzykologiczne były dla pitagorejczyków czymś więcej niż uprawianiem nauki: przede wszystkim miały charakter praktyki religijnej. *Wszystko jest liczbą*, powiadali pitagorejczycy i gorliwie zajmowali się właściwościami liczb. Najistotniejszym wynikiem szkoły pitagorejskiej było odkrycie liczb niewymiernych, a ściślej niewspółmierności przekątnej kwadratu z jego bokiem. Odkrycie to doprowadziło do zmiany charakteru greckiej matematyki: zdominowała ją odtąd geometria, i nawet zagadnienia, które dla nas byłyby arytmetycznymi, przedstawiano w geometrycznej szacie (typowym przykładem może być druga księga Euklidesowych *Elementów*).

Jeszcze przed Euklidesem inni autorzy redagowali swoje zbiory *elementów* — czyli najbardziej podstawowych twierdzeń matematyki. Jedynymi zachowanymi choć we fragmencie są *Elementy Hippokratesa z Chios* (V w. p.n.e). Znamy z tego dzieła tylko jedno twierdzenie — rozwiązanie tzw. „kwadratury księżyców”. Autorami *Elementów* byli także między innymi Teudios z Magnezji oraz Leon: nie możemy jednak prawie nic powiedzieć ani o nich samych, ani o ich dziełach.

Wśród najważniejszych matematyków przed Euklidesem trzeba wymienić tych związanych z Akademią, zwłaszcza że ich dorobek stanowi istotny składnik euklideskiego dzieła. **Eudoksos z Knidos**, autor rewolucyjnej *teorii proporcji* (antycypującej dziewiętnastowieczną teorię liczb

rzeczywistych Dedekinda), prekursor rachunku całkowego (tzw. *metoda wyczerpywania*) oraz twórca geometryczno – astronomicznego modelu układu słonecznego, zwanego teorią sfer współśrodkowych, uznawany jest dziś za jednego z największych odkrywców w całej historii matematyki. Obok niego **Teajtet z Aten** badał liczby niewymierne (ułamki łańcuchowe) i wielościany foremne (odkrył dwunastościan foremny), a **Menajchmos**, uczeń Eudoksosa, zajmował się stożkowymi.

Dzieła Euklidesa. Oprócz najśłynniejszego dzieła — *Elementów*, Euklides był najprawdopodobniej autorem kilku mniejszych traktatów matematycznych. Przypisywano mu autorstwo następujących zachowanych do dziś (czasem po grecku, czasem w tłumaczeniu arabskim bądź łacińskim) dzieł: *Dane*, *O podziałach*, *Optyka*, *Zjawiska* (*Φαινόμενα*), *Podział miary* (*Sectio Canonis*), *Wprowadzenie do harmoniki*, *Optyka*, *O zwierciadłach*.

Znamy także tytuły innych, niezachowanych traktatów: *O stożkowych*, *O miejscach powierzchniowych*, *Poryzmaty*, *O błędnych wnioskach*.

Autentyczność wielu z powyższych dzieł jest bądź kwestionowana, bądź nawet zdecydowanie odrzucona. Wygląda na to, że rozmaite mniejsze prace różnych autorów na tematy związane z matematyką (mamy tu obok geometrii: optykę, fizykę, harmonikę, astronomię) dołączano do korpusu prac Euklidesa.

Tekst Elementów. Elementy Euklidesa przez całą starożytność stanowiły podstawowy podręcznik matematyki. W trakcie wielokrotnego przepisywania były często uzupełniane, poprawiane i komentowane przez mniej lub bardziej kompetentnych i uważnych kopistów, tak że treść poszczególnych rękopisów mogła nawet znacznie różnić się od siebie. W IV w. n.e. Teon z Aleksandrii ponownie przejrzał i zredagował dawny (liczący sobie zapewne już ponad sześć wieków) tekst, wprowadzając rozmaite poprawki i uzupeł-

nienia. Zmiany Teona zmierzały raczej do uprzyśtępnienia dzieła i ułatwienia jego lektury niż do odtworzenia oryginalnego tekstu Euklidesa.

Opracowanie Teona wyparło starsze redakcje. Dziś wśród wielu zachowanych starych (IX – XII w. n.e.) rękopisów *Elementów* wszystkie z wyjątkiem jednego (*codex Vaticanus*) pochodzą właśnie z edycji Teona. W dziewiętnastym wieku porównano obie tradycje rękopiśmienne, teonową i przedteonową, i zestawiono je z kilkoma zachowanymi fragmentami papiusowymi oraz fragmentami przekazanymi przez starożytnych i średnio-wiecznych komentatorów. Umożliwiło to duńskiemu filologowi I.L. Heibergowi przygotowanie znakomitego wydania krytycznego *Elementów*. Współczesna edycja E. S. Stamatisa, będąca podstawą niniejszego przekładu, jest tylko przejrzanym wznowieniem redakcji Heiberga.

Elementy. Arystoteles objaśnia znaczenie słowa „elementy” (*στοιχεῖα*) tak oto: „elementami nazywa się w geometrii takie twierdzenia, których dowody wchodzą do dowodów innych zdań, czy to wszystkich, czy tylko niektórych”. (Metaph. 998a25; przekład Kazimierza Leśniaka). Według jednego z komentatorów, neoplatońskiego filozofa Proklosa (V w. n.e.), Euklides „zebrał wiele z Eudoksosa, udoskonalił wiele z Teajteta oraz podał nieodparte dowody twierdzeń uzasadnionych zbyt luźno przez poprzedników.” Jak można wywnioskować, *Elementy* są dziełem niejednolitym, zbierającym niektóre podstawowe osiągnięcia przedeuklideskiej matematyki.

Do dziś trwa spór, jaką rolę przy powstaniu *Elementów* odegrał Euklides: wciąż są tacy, którzy nie uznają go za pełnoprawnego autora dzieła, lecz za zręcznego redaktora, który tylko opracował wyniki poprzedników. Zazwyczaj uważa się jednak, że Euklides miał merytoryczny wkład w treść *Elementów*. Wobec niemal całkowitego braku tekstów matematyki dawniejszej nie sposób wszakże ustalić, w jakim stopniu udoskonalił on metodę aksjomatyczno-dedukcyjną i jak wiele dowodów twierdzeń jest jego autorstwa.

Elementy składają się z 13 ksiąg. Księgi I – IV dotyczą planimetrii. Księga V omawia teorię proporcji Eudoksosa, użytą w księdze VI do rozwinięcia teorii podobieństwa wielokątów. Księgi VII – IX są arytmetyczne. Księga X przedstawia konstrukcje wyrażeń zawierających pierwiastki. Wreszcie trzy ostatnie księgi dotyczą stereometrii. *Elementy* kończą się konstrukcją pięciu wielościanów foremnych i twierdzeniem, że innych wielościanów foremnych nie ma.

Komentatorzy starożytni. Nasze wiadomości o *Elementach*, a także o całej matematyce przedeuklideskiej, pochodzą w znacznej mierze z tradycji pośredniej — zawdzięczamy je anonimowym scholiastom i zachowanym komentarzom do greckich prac matematycznych. Autorami tych komentarzy byli żyjący później matematycy, filozofowie, historycy.

Najobszerniejszy zachowany komentarz do pierwszej księgi *Elementów* jest dziełem **Proklosa**, scholarchy platońskiej Akademii z V w. n.e. Proklos był przede wszystkim neoplatońskim filozofem i komentatorem dialogów Platona, a dopiero w dalszej kolejności matematykiem. Jego komentarz jest więc pełen rozważań filozoficznych, luźno tylko związanych z przedstawioną w *Elementach* matematyką. Zawiera jednak również немало uwag czysto matematycznych. Wartość komentarza Proklosa polega głównie na tym, że miał on w ręku wiele ważnych starożytnych tekstów matematycznych oraz najstarsze, niezachowane, prace z historii matematyki. Proklos korzysta z licznych źródeł, a co więcej, zwykle podaje, skąd czerpie swe wiadomości. Do najwartościowszych źródeł Proklosa należą: *Historia geometrii* Eudemososa, ucznia Arystotelesa, prace Geminosa (I w. p.n.e.) oraz komentarze Herona (III w. n.e.), Porfirusza (III w. n.e.) i Pappusa (III/IV w. n.e.).

Zachowały się ponadto uwagi Simplikiosa (V/VI w. n.e.), komentatora prac Arystotelesa, na temat niektórych zagadnień matematyki greckiej.

Innym ważnym źródłem jest arabski komentarz Al-Nairiziego (łac. Anarius) do pierwszej księgi *Elementów*.

*

Elementy Euklidesa są jednym z najważniejszych tekstów w dziejach kultury światowej. Były, po pierwsze, obowiązującym przez stulecia wzorem metody naukowej (i nie tylko naukowej: przykładem *Ethica more geometrico demonstrata* Spinozy), po drugie, podręcznikiem, z którego jeszcze na początku ubiegłego wieku uczono się podstaw geometrii. Nic więc dziwnego, że doczekały się niezwykle licznych wydań i przekładów na niemal wszystkie języki cywilizowanego świata. Jednym z wyjątków (przykrym) jest polszczyzna: najpełniejszy polski przekład *Elementów* dokonany przez Józefa Czecha (*Euklidesa początków Geometrii Xiąg ośmioro*, Wilno 1807) obejmuje tylko osiem ksiąg.

Podstawą naszego przekładu pierwszej księgi jest wydanie E. S. Stamatisa: *Euclidis Elementa*, vol. I. Libri I-IV cum appendicibus, post I.L. Heiberg edidit E.S. Stamatis, Lipsiae 1969.

Przekład opatrzyliśmy skromnym komentarzem, którego celem jest przybliżenie współczesnemu czytelnikowi tekstu i ułatwienie lektury. Spośród prac, z których korzystaliśmy przy pisaniu komentarza, szczególnie pomocne były:

- 1) Euclid, *The Thirteen Books of the Elements*, translated with introduction and commentary by Thomas L. Heath, second edition, revised with additions, vol I, New York 1956.

(klasyczny przekład angielski Heatha, wraz z bardzo szczegółowym i w znacznej mierze wciąż aktualnym komentarzem)

2) Euclide, *Les Éléments*, vol. 1, Introduction générale par Maurice Caveing, Livres I-IV: Géométrie plane, Traduction et commentaires par Bernard Vitrac, Paris 1990.

(współczesny przekład francuski Vitraca wraz z komentarzem)

3) R. Hartshorne, *Geometry: Euclid and Beyond*, Springer-Verlag 2002.
(współczesne opracowanie geometrii elementarnej, nawiązujące do Euklidesa; znakomite źródło głębszych informacji matematycznych o problematyce poruszanej w *Elementach*).

4) *Procli Diadochi in primum Euclidis elementorum librum Commentarii*, ed. G. Friedlein, Leipzig, 1873

5) Proclus, *A Commentary on the first Book of Euclid's Elements*, trans. G. E. Morrow, with foreword by I. Mueller, Princeton 1992.

Zainteresowanemu czytelnikowi polecamy też kilka wybranych pozycji dostępnych w języku polskim:

1) S. Kulczycki, *Z dziejów matematyki greckiej*, Warszawa 1973.

2) S. Kulczycki, *Geometria nieeuklidesowa*, Warszawa 1956,

3) M. Kordos, *Wykłady z historii matematyki*, Warszawa 1994.

4) J. Mioduszewski, *Ciągłość. Szkice z historii matematyki*, Warszawa 1996

5) G.E.R. Lloyd, *Nauka grecka po Arystotelesie*, przeł. J. Lesiński, Warszawa 1998.

6) R. Murawski, *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, Poznań 2003.

Podziękowania. Serdecznie dziękujemy osobom, które wsparły nas w pracy nad przekładem swoimi radami lub uwagami krytycznymi, a w

szczególności: Panu Profesorowi Mikołajowi Szymańskiemu z Instytutu Filologii Klasycznej Uniwersytetu Warszawskiego, Panu Profesorowi Markowi Kordosowi z Instytutu Matematyki Uniwersytetu Warszawskiego oraz Panu Doktorowi Janowi Bigajowi. Serdecznie dziękujemy również Panu Pawłowi Kośmickiemu za wykonanie rysunków.