ELEMENTY
KSIĘGA I*

DEFINICJE

1 Punktem jest coś, co nie ma części.
2 Linią – długość bez szerokości.
3 Brzegami linii są punkty.
4 Prostą jest linia, która leży na równi z punktami na niej.
5 Powierzchnią jest coś, co ma jedynie długość i szerokość.
6 Brzegami powierzchni są linie.
7 Płaszczyzną jest powierzchnia, która leży na równi z prostymi na niej.
8 Kątem płaskim jest wzajemne nachylenie dwu linii na płaszczyźnie, które stykają się, lecz nie leżą na wspólnej prostej.
9 Kiedy linie zawierające kąt są proste, kąt ten nazywa się prostoliniowym.
10 Kiedy prosta stojąca na prostej tworzy równe sobie nawzajem kąty przylegające, oba te równe kąty są kątami prostymi, prosta zaś nazywa się prostopadłą do tej, na której stoi.
11 Kątem rozwartym jest kąt większy od prostego.
12 Kątem ostrym – mniejszy od prostego.
13 Granicą jest coś, co jest brzegiem czegoś.
14 Figurą jest to, co jest zawarte w obrębie pewnej granicy lub granic.
15 Kołem jest figura płaska zawarta w obrębie jednej linii [zwanej okręgiem][1], takiej, że wszystkie proste spadające na nią z jednego spośród punktów wewnątrz figury są sobie równe.
16 Punkt ten nazywa się środkiem koła.
17 Średnicą koła jest prosta poprowadzona przez środek i kończąca się po obu stronach na okręgu, która dzieli koło na pół.
18 Półkolem jest figura zawarta między średnicą a odciętą przez średnicę częścią okręgu. Środek półkola jest taki sam jak środek koła.
19 Figurami prostoliniowymi są te, które są zawarte między prostymi; figury trójboczne są zawarte między trzema, czworoboczne – między czterema, a wieloboczne – między więcej niż czterema prostymi.

---

* Przekład z: *Euclidis Elementa*, vol. I. Libri I-IV cum appendicibus, post I. L. Heiberg edidit E. S. Stamatis. Lipsiae 1969. Przekładu dokonali: Leszek Aleksander Kołodziejczyk i Rafał Szczepkowski.

1 Słowa w klamrach to fragmenty uważane za nieautentyczne. Ważniejsze fragmenty tego rodzaju omawiamy w *Komentarzu* (*przyp. tłum.*).

20 Wśród figur trójbocznych, równobocznym jest trójkąt mający trzy równe boki, równoramiennym – mający jedynie dwa równe boki, a nierównoramiennym – mający trzy nierówne boki.

21 Dalej wśród figur trójbocznych, prostokątnym jest trójkąt mający kąt prosty, rozwartokątnym – mający kąt rozwarty, a ostrokątnym – mający trzy kąty ostre.

22 Wśród figur czworobocznych, kwadratem jest figura równoboczna prostokątna, różnobokiem – prostokątna, ale nie równoboczna, rombem – równoboczna, ale nie prostokątna, romboidem – mająca równe naprzeciwległe boki i kąty, ale ani równoboczna, ani prostokątna. Pozostałe czworoboki nazwijmy trapezami.

23 Równoległymi są proste leżące na tej jednej płaszczyźnie, które przedłużone nieskończończenie po obu stronach, z żadnej się nie zbiegają.

POSTULATY

1 Niech będzie wymagane, aby: poprowadzić prostą od każdego punktu do każdego punktu,

2 skończoną prostą przedłużyć w sposób ciągły po prostej,

3 narysować koło o dowolnym środku i promieniu,

4 wszystkie kąty proste były sobie równe,

5 jeśli prosta opadająca na dwie proste tworzy kąty wewnętrzne po jednej stronie mniejsze od dwu kątów prostych, te dwie proste przedłużone nieskończenie zbiegały się po tej stronie, po której są te kąty mniejsze od dwu kątów prostych.

AKSJOMATY

1 Rzeczy równe temu samemu są też sobie równe.

2 Jeśli do rzeczy równych dodać równe, całości będą równe.

3 Jeśli od rzeczy równych odjąć równe, części pozostałe będą równe.

[4 Jeśli do rzeczy nierównych dodać równe, całości będą nierówne.

5 Dwukrotności tego samego są sobie równe.

6 Połowy tego samego są sobie równe.]

7 Rzeczy pokrywające się nawzajem są sobie równe.

8 Całość [jest] większa od części.

[9 Dwie proste nie zawierają obszaru.]

1

Na danej prostej skończonej skonstruować trójkąt równoboczny.

Niech daną prostą skończoną będzie AB. Na prostej AB należy teraz skonstruować trójkąt równoboczny.

Narysujmy koło BCD o środku A i promieniu AB. Dalej, narysujmy koło ACE o środku B i promieniu BA. Z punktu C, w którym przecinają się te koła, pociągnijmy proste CA, CB do punktów A, B.

Ponieważ punkt A jest środkiem koła CDB, prosta AC jest równa AB. Dalej, ponieważ punkt B jest środkiem koła CAE, prosta BC jest równa BA. Wykazaliśmy jednak, że również CA jest równe AB. Obie proste CA, CB są więc równe AB. Rzeczy równe zaś temu samemu są też sobie równe. Również CA jest więc równe CB. Wszystkie trzy proste CA, AB, BC są więc sobie równe.

Trójkąt ABC jest więc równoboczny i został skonstruowany na danej prostej skończonej AB.

[Na danej prostej AB skonstruowaliśmy więc trójkąt równoboczny.] Co należało wykonać.

2

W danym punkcie położyć prostą równą danej prostej.

Niech danym punktem będzie A, a daną prostą BC. Należy teraz położyć w punkcie A prostą równą danej prostej BC.

Pociągnijmy z punktu A do punktu B prostą AB i skonstruujmy na niej trójkąt równoboczny DAB. Przedłużmy DA, DB po prostej prostymi AE, BF. Narysujmy koło CGH o środku B i promieniu BC. Dalej narysujmy koło GJK o środku D i promieniu DG.

Ponieważ punkt B jest środkiem koła CGH, prosta BC jest równa BG. Dalej, ponieważ punkt D jest środkiem koła GJK, prosta DK jest równa DG, z czego DA jest równe DB. Pozostałe AK jest więc równe pozostałemu BG. Wykazaliśmy jednak, że również BC jest równe BG. Obie proste AK, BC są więc równe BG. Rzeczy równe zaś temu samemu są też sobie równe. Również AK jest więc równe BC.

W danym punkcie A położyliśmy więc prostą AK równą danej prostej BC. Co należało wykonać.

3

Mając dane dwie nierówne proste, odjąć od większej prostą równą mniejszej.

Niech danymi dwiema nierównymi prostymi będą AB i C, z których AB niech będzie większa. Należy teraz od większej prostej AB odjąć prostą równą mniejszej C.

Połóżmy w punkcie A prostą AD równą prostej C i narysujmy koło DEF o środku A i promieniu AD.

Ponieważ punkt A jest środkiem koła DEF, prosta AE jest równa AD; ale i prosta C jest równa AD. Obie proste AE i C są więc równe AD. Stąd i AE jest równe C.

Mając więc dane dwie nierówne proste AB i C, odjęliśmy od większej AB prostą AE równą mniejszej C.

Co należało wykonać.

4

Jeśli dwa trójkąty mają dwa boki <jednego>[2] równe odpowiednio dwu bokom <drugiego> i równe kąty zawarte między tymi równymi prostymi, to mają też równe podstawy; również te trójkąty są równe i pozostałe kąty są równe – odpowiednio te, które leżą naprzeciw równych boków.

Niech dwa trójkąty ABC, DEF mają dwa boki <jednego> AB, AC równe odpowiednio dwu bokom <drugiego> DE, DF, mianowicie bok AB równy DE i bok AC równy DF, i kąt BAC równy kątowi EDF.

Twierdzę, że również podstawa BC jest równa podstawie EF i że trójkąt ABC będzie równy trójkątowi DEF, i pozostałe kąty będą równe pozostałym kątom – odpowiednio te, które leżą naprzeciw równych boków, mianowicie kąt ABC równy kątowi DEF, a kąt ACB równy kątowi DFE.

Jeśli bowiem pokryjemy trójkąt DEF trójkątem ABC i położymy punkt A w punkcie D, a prostą AB na prostej DE, to również punkt B pokryje się z punktem E, gdyż AB jest równe DE. Skoro zatem prosta AB pokryła się z DE, to również prosta AC pokryje się z DF, gdyż kąt BAC jest równy kątowi EDF. Stąd i punkt C pokryje się z punktem F, gdyż AC jest z kolei równe DF. Ale przecież i B pokrywa się z E. Stąd podstawa BC pokryje się z EF [Jeśli bowiem podstawa BC nie pokryje się z EF, mimo że B pokryło się z E, a C – z F, to dwie proste będą zawierały obszar; co jest niemożliwe. Podstawa BC po-

2 Tekst w nawiasach <> został dodany przez tłumaczy (*przyp. tłum.*).

kryje się więc z BF] i będzie jej równa. Stąd również cały trójkąt ABC pokryje się z całym trójkątem DEF i będzie mu równy. Pozostałe kąty również pokryją się i będą sobie równe, mianowicie kąt ABC będzie równy kątowi DEF, a kąt ACB kątowi DFE.

Jeśli więc dwa trójkąty mają dwa boki [jednego] równe odpowiednio dwu bokom <drugiego> i równe kąty zawarte między tymi równymi prostymi, to mają też równe podstawy; również te trójkąty są równe i pozostałe kąty są równe – te, które leżą naprzeciw równych boków. Co należało wykazać.

5

W trójkątach równoramiennych kąty przy podstawie są sobie równe, a jeśli przedłużyć równe proste, kąty pod podstawą będą sobie równe.

Niech trójkąt równoramienny ABC ma bok AB równy bokowi AC. Przedłużmy AB, AC po prostej prostymi BD, CE. Twierdzę, że kąt ABC jest równy kątowi ACB, a kąt CBD kątowi BCE.

Weźmy bowiem dowolny punkt F na prostej BD i odejmijmy od większej prostej AE prostą AG równą mniejszej AF. Pociągnijmy proste FC, GB.

Ponieważ prosta AF jest równa AG, a prosta AB równa AC, to dwie proste FA, AC są równe odpowiednio dwu prostym GA, AB. <Te pary prostych> zawierają też wspólny kąt FAG. Podstawa FC jest więc równa podstawie GB, trójkąt AFC będzie równy trójkątowi AGB, a pozostałe kąty będą równe pozostałym kątom — odpowiednio te, które leżą naprzeciw równych boków, mianowicie kąt ACF równy ABG, a kąt AFC równy AGB. Ponadto, ponieważ cała prosta AF jest równa całej AG, z czego BA jest równe AC, to pozostałe BF jest równe pozostałemu CG. Wykazaliśmy jednak, że również FC jest równe GB. Dwie proste BF, FC są więc równe odpowiednio dwu prostym CG, GB. Również kąt BFC jest równy CGB, a ich podstawa BC jest wspólna. Również trójkąt BFC będzie więc równy trójkątowi CGB i pozostałe kąty będą równe pozostałym kątom — odpowiednio te, które leżą naprzeciw równych boków. Kąt FBC jest więc równy kątowi GCB, a kąt BCF kątowi CBG.

Ponieważ wykazaliśmy, że cały kąt ABG jest równy całemu kątowi ACF, z czego kąt CBG jest równy BCF, to pozostały kąt ABC jest równy pozostałemu kątowi ACB; a są to kąty przy podstawie trójkąta ABC. Wykazaliśmy jednak, że również kąt FBC jest równy GCB; a są to kąty pod podstawą.

W trójkątach równoramiennych kąty przy podstawie są więc sobie równe, a jeśli przedłużyć równe proste, kąty pod podstawą będą sobie równe. Co należało wykazać.

6

Jeśli dwa kąty trójkąta są sobie równe, to i boki leżące naprzeciw równych kątów są sobie równe.

Niech trójkąt ABC ma kąt ABC równy kątowi ACB. Twierdzę, że również bok AB jest równy bokowi AC.

Jeśli bowiem AB jest nierówne AC, to jedno z nich jest większe. Niech większym będzie AB. Odejmijmy od większego AB prostą DB równą mniejszej AC i pociągnijmy DC.

Ponieważ DB jest równe AC, a BC jest wspólne, to dwie proste DB, BC są równe odpowiednio dwu prostym AC, CB. Również kąt DBC jest równy ACB. Podstawa DC jest więc równa podstawie AB i trójkąt DBC będzie równy trójkątowi ACB, czyli mniejszy większemu; co jest niedorzeczne. AB nie jest więc nierówne AC. Jest więc równe.

Jeśli więc dwa kąty trójkąta są sobie równe, to i boki leżące naprzeciw równych kątów są sobie równe. Co należało wykazać.

7

Nie można skonstruować na prostej dwu prostych równych odpowiednio dwu innym prostym <skonstruowanym> na tej samej prostej po tej samej stronie, mających wspólne krańce z tamtymi prostymi, ale zbiegających się w innym punkcie niż tamte proste.

Jeśli bowiem można, to skonstruujmy na prostej AB dwie proste AD, DB równe odpowiednio dwu innym prostym AC, CB <skonstruowanym> na tej samej prostej po tej samej stronie, mające wspólne krańce z tamtymi prostymi, ale zbiegające się w punkcie D innym niż punkt C, w którym zbiegają się tamte proste — tak, aby prosta CA była równa DA i miała z nią wspólny kraniec A, a prosta CB była równa DB i miała z nią wspólny kraniec B. Pociągnijmy też prostą CD.

Ponieważ prosta AC jest równa AD, również kąt ACD jest równy ADC. Kąt ADC jest więc większy od DCB. Kąt CDB jest więc znacznie większy od DCB. Dalej, ponieważ prosta CB jest równa DB, również kąt CDB jest równy DCB. Wykazaliśmy jednak, że jest też od niego znacznie większy; co jest niemożliwe.

Nie można więc skonstruować na prostej dwu prostych równych odpowiednio dwu innym prostym <skonstruowanym> na tej samej prostej po tej samej stronie, mających wspólne krańce z tamtymi prostymi, ale zbiegających się w innym punkcie niż tamte proste. Co należało wykazać.

8

Jeśli dwa trójkąty mają dwa boki <jednego> równe odpowiednio dwu bokom <drugiego> i mają równe podstawy, to mają też równe kąty zawarte między tymi równymi prostymi.

Niech dwa trójkąty ABC, DEF mają dwa boki <jednego> AB, AC równe odpowiednio dwu bokom <drugiego> DE, DF, mianowicie bok AB równy DE i AC równy DF; niech mają też podstawę <jednego> BC równą podstawie <drugiego> EF. Twierdzę, że również kąt BAC jest równy kątowi EDF.

Jeśli bowiem pokryjemy trójkąt DEF trójkątem ABC i położymy punkt B w punkcie E, a prostą BC na prostej EF, to również punkt C pokryje się z punktem F, gdyż BC jest równe EF. Skoro zatem BC pokryło się z EF, to również BA, AC pokryją się z ED, DF. Jeśli bowiem podstawa BC pokryje się z podstawą EF, a boki BA, AC nie pokryją się z ED, DF, lecz miną się z nimi jako EG, GF, to na prostej zostaną skonstruowane dwie proste równe odpowiednio dwu innym prostym <skonstruowanym> na tej samej prostej, po tej samej stronie, mające wspólne krańce z tamtymi prostymi, ale zbiegające się w innym punkcie niż tamte proste. Nie można ich jednak skonstruować. Nie jest więc tak, że po pokryciu się podstawy BC z podstawą EF boki BA, AC nie pokryją się z ED, DF. Pokryją się więc. Stąd również kąt BAC pokryje się z kątem EDF i będzie mu równy.

Jeśli więc dwa trójkąty mają dwa boki jednego równe odpowiednio dwu bokom drugiego i mają równe podstawy, to mają też równe kąty zawarte między tymi równymi prostymi. Co należało wykazać.

9

Dany kąt prostoliniowy podzielić na pół.

Niech danym kątem prostoliniowym będzie BAC. Należy go teraz podzielić na pół.

Weźmy dowolny punkt D na prostej AB. Odejmijmy od prostej AC prostą AE równą AD i pociągnijmy prostą DE. Skonstruujmy na DE trójkąt równoboczny DEF i pociągnijmy prostą AF. Twierdzę, że prosta AF dzieli kąt BAC na pół.

Skoro bowiem AD jest równe AE, a AF jest wspólne, to dwie proste DA, AF są równe odpowiednio dwu prostym EA, AF. Również podstawa DF jest równa podstawie EF. Kąt DAF jest więc równy kątowi EAF.

Prosta AF dzieli więc na pół dany kąt prostoliniowy BAC. Co należało wykonać.

10

Daną prostą skończoną podzielić na pół.

Niech daną prostą skończoną będzie AB. Należy teraz prostą skończoną AB podzielić na pół.

Skonstruujmy na niej trójkąt równoboczny ABC i podzielmy kąt ACB na pół prostą CD. Twierdzę, że punkt D dzieli prostą AB na pół.

Skoro bowiem AC jest równe CB, a CD jest wspólne, to dwie proste AC, CD są równe odpowiednio dwu prostym BC, CD. Również kąt ACD jest równy kątowi BCD. Podstawa AD jest więc równa podstawie BD.

Punkt D dzieli więc na pół daną prostą skończoną AB. Co należało wykonać.

11

Z danego punktu na danej prostej poprowadzić prostą pod kątem prostym.

Niech daną prostą będzie AB, a danym na niej punktem C. Należy teraz poprowadzić z punktu C prostą pod kątem prostym do prostej AB.

Weźmy dowolny punkt D na prostej AC i połóżmy CE równe CD. Skonstruujmy na prostej DE trójkąt równoboczny FDE i pociągnijmy FC. Twierdzę, że prosta FC została poprowadzona pod kątem prostym do danej prostej AB z danego na niej punktu C.

Skoro bowiem DC jest równe CE, a CF jest wspólne, to dwie proste DC, CF są równe odpowiednio dwu prostym EC, CF. Również podstawa DF jest równa podstawie FE. Kąt DCF jest więc równy kątowi ECF, a są to kąty przylegające. Kiedy zaś prosta stojąca na prostej tworzy równe sobie nawzajem kąty przylegające, oba te równe kąty są kątami prostymi. Oba kąty DCF, FCE są więc proste.

Z danego punktu C na danej prostej AB poprowadziliśmy więc prostą CF pod kątem prostym. Co należało wykonać.

12

Z danego punktu, który nie leży na danej prostej nieskończonej, poprowadzić prostą prostopadłą do tej prostej.

Niech daną prostą nieskończoną będzie AB, a danym punktem, który nie leży na niej, niech będzie C. Należy teraz z danego punktu C, który nie leży na danej prostej nieskończonej AB, poprowadzić prostą prostopadłą do tej prostej.

Weźmy dowolny punkt D po przeciwnej stronie prostej AB i narysujmy koło EFG o środku C i promieniu CD. Podzielmy prostą EG na pół punktem H i pociągnijmy proste CG, CH, CE. Twierdzę, że z danego punktu C, który nie leży na danej prostej nieskończonej AB, została poprowadzona prosta CH prostopadła do tej prostej.

Skoro bowiem GH jest równa HE, a HC jest wspólne, to dwie proste GH, HC są równe odpowiednio dwu prostym EH, HC. Również podstawa CG jest równa podstawie CE. Kąt CHG jest więc równy kątowi EHC; a są to kąty przylegające. Kiedy zaś prosta stojąca na prostej tworzy równe sobie nawzajem kąty przylegające, oba te równe kąty są kątami prostymi, a prosta nazywa się prostopadłą do tej, na której stoi.

Z danego punktu C, który nie leży na danej prostej nieskończonej AB, poprowadziliśmy więc prostą CH prostopadłą do tej prostej. Co należało wykonać.

13

Jeśli prosta stojąca na prostej tworzy kąty, to tworzy albo dwa kąty proste, albo kąty równe dwu kątom prostym.

Niech bowiem pewna prosta AB stojąca na prostej CD tworzy kąty CBA, ABD. Twierdzę, że kąty CBA, ABD są dwoma kątami prostymi albo są równe dwu kątom prostym.

Jeśli kąt CBA jest równy ABD, to są one dwoma kątami prostymi. Jeśli zaś nie, to poprowadźmy z punktu B prostą BE pod kątem prostym do CD. Kąty CBE i EBD są dwoma kątami prostymi. Skoro kąt CBE jest równy dwu kątom CBA, ABE, dodajmy wspólny kąt EBD: kąty CBE, EBD są więc równe trzem kątom CBA, ABE, EBD. Dalej, skoro kąt DBA jest równy dwu kątom DBE, EBA, dodajmy wspólny kąt ABC: kąty DBA, ABC są więc równe trzem kątom DBE, EBA, ABC.

Wykazaliśmy jednak, że również kąty CBE, EBD są równe tym samym trzem kątom. Rzeczy równe zaś temu samemu są też sobie równe. Również kąty CBE, EBD są więc równe DBA, ABC; ale kąty CBE, EBD są dwoma kątami prostymi. Kąty DBA, ABC są więc równe dwu kątom prostym.

Jeśli więc prosta stojąca na prostej tworzy kąty, to tworzy albo dwa kąty proste, albo kąty równe dwu kątom prostym. Co należało wykazać.

14

Jeśli dwie proste nie leżące po tej samej stronie pewnej prostej tworzą w pewnym punkcie na niej przylegające kąty równe dwu kątom prostym, to te proste leżą na wspólnej prostej.

Niech bowiem dwie proste BC, BD nie leżące po tej samej stronie prostej AB tworzą w punkcie B przylegające kąty ABC, ABD równe dwu kątom prostym. Twierdzę, że prosta BD leży na wspólnej prostej z CB.

Jeśli bowiem BD nie leży na wspólnej prostej z BC, to niech prosta BE leży na wspólnej prostej z CB. Ponieważ prosta AB stoi na prostej CBE, kąty ABC, ABE są równe dwu kątom prostym. Również kąty ABC, ABD są jednak równe dwu kątom prostym. Kąty CBA, ABE są więc równe kątom CBA, ABD. Odejmijmy wspólny kąt CBA: pozostały kąt ABE jest więc równy pozostałemu kątowi ABD, czyli mniejszy większemu; co jest niemożliwe. Prosta CB nie leży więc na wspólnej prostej z prostą BE. Podobnie możemy wykazać, że i z żadną inną prostą oprócz BD. Prosta CB leży więc na wspólnej prostej z prostą BD.

Jeśli więc dwie proste nie leżące po tej samej stronie pewnej prostej tworzą w pewnym punkcie na niej przylegające kąty równe dwu kątom prostym, to te proste leżą na wspólnej prostej. Co należało wykazać.

15

Jeśli dwie proste przecinają się nawzajem, to tworzą wzajemnie sobie równe kąty wierzchołkowe.

Niech bowiem dwie proste AB, CD przecinają się nawzajem w punkcie E. Twierdzę, że kąt AEC jest równy kątowi DEB, a kąt CEB – kątowi AED.

Skoro bowiem prosta AE stoi na prostej CD, tworząc kąty CEA, AED, to kąty CEA, AED są równe dwu kątom prostym. Dalej, skoro prosta DE stoi na prostej AB, tworząc kąty AED, DEB, to kąty AED, DEB są równe dwu kątom prostym. Wykazaliśmy jednak, że również kąty CEA, AED są równe dwu kątom prostym. Kąty CEA, AED są więc równe kątom AED, DEB. Odejmijmy wspólny kąt AED: pozostały kąt CEA jest więc równy pozostałemu kątowi BED. Podobnie możemy wykazać, że również kąty CEB i DEA są sobie równe.

Jeśli więc dwie proste przecinają się nawzajem, to tworzą wzajemnie sobie równe kąty wierzchołkowe. Co należało wykazać.

[Wniosek.

Jest stąd zatem jasne, że jeśli dwie proste przecinają się nawzajem, to tworzą kąty przy przecięciu równe czterem kątom prostym.]

16

Po przedłużeniu jednego z boków dowolnego trójkąta kąt zewnętrzny jest większy od każdego z kątów wewnętrznych naprzeciwległych.

Niech ABC będzie trójkątem. Przedłużmy jeden z jego boków, BC, do punktu D. Twierdzę, że kąt zewnętrzny ACD jest większy od obu kątów wewnętrznych naprzeciwległych CBA, BAC.

Podzielmy AC na pół punktem E. Pociągnąwszy prostą BE, przedłużmy ją po prostej do punktu F i połóżmy EF równe BE. Pociągnijmy FC i doprowadźmy AC do punktu G.

Ponieważ prosta AE jest równa EC, a prosta BE równa EF, to dwie proste AE, EB są równe odpowiednio dwu prostym CE, EF. Również kąt AEB jest równy FEC, są to bowiem kąty wierzchołkowe. Podstawa AB jest więc równa podstawie FC, trójkąt ABE jest równy trójkątowi FEC, a pozostałe kąty są równe pozostałym kątom – odpowiednio te, które leżą naprzeciw równych boków. Kąt BAE jest więc równy kątowi ECF. Kąt ECD jest zaś większy od ECF: kąt ACD jest więc większy od kąta BAE. Podobnie dzieląc na pół prostą BC można wykazać, że kąt BCG, to jest kąt ACD, jest większy od ABC.

Po przedłużeniu jednego z boków dowolnego trójkąta kąt zewnętrzny jest więc większy od każdego z kątów wewnętrznych naprzeciwległych.. Co należało wykazać.

17

Dwa dowolnie wybrane kąty dowolnego trójkąta są mniejsze od dwu kątów prostych.

Niech ABC będzie trójkątem. Twierdzę, że dwa dowolnie wybrane kąty trójkąta ABC są mniejsze od dwu kątów prostych.

Przedłużmy bowiem prostą BC do punktu D. Ponieważ kąt ACD jest zewnętrzny względem trójkąta ABC, jest on większy od naprzeciwległego kąta wewnętrznego ABC. Dodajmy wspólny kąt ACB: kąty ACD, ACB są więc większe od kątów ABC, BCA. Ale kąty ACD, CBA są równe dwu kątom prostym. Kąty ABC, BCA są więc mniejsze od dwu kątów prostych. Podobnie możemy wykazać, że kąty BAC, ACB i jeszcze kąty CAB, ABC są mniejsze od dwu kątów prostych.

Dwa dowolnie wybrane kąty dowolnego trójkąta są więc mniejsze od dwu kątów prostych. Co należało wykazać.

18

W dowolnym trójkącie naprzeciw większego boku leży większy kąt.

Niech bowiem trójkąt ABC ma bok AC większy od AB. Twierdzę, że również kąt ABC jest większy od BCA.

Skoro bowiem AC jest większe od AB, połóżmy AD równe AB i pociągnijmy BD. Ponieważ kąt ADB jest zewnętrzny względem trójkąta BCD, jest on większy od naprzeciwległego kąta wewnętrznego DCB. Kąt ADB jest zaś równy kątowi ABD, ponieważ i bok AB jest równy bokowi AD. Również kąt ABD jest więc większy od ACB. Kąt ABC jest więc znacznie większy od kąta ACB.

W dowolnym trójkącie naprzeciw większego boku leży więc większy kąt. Co należało wykazać.

19

W dowolnym trójkącie naprzeciw większego kąta leży większy bok.

Niech trójkąt ABC ma kąt ABC większy od kąta BCA. Twierdzę, że również bok AC jest większy od boku AB.

Jeśli bowiem nie, to AC jest albo równe AB, albo mniejsze. Otóż AC nie jest równe AB; również kąt ABC byłby bowiem równy ACB, a nie jest. AC nie jest więc równe AB. AC nie jest też bynajmniej mniejsze od AB; również kąt ABC byłby bowiem mniejszy od ACB, a nie jest. AC nie jest więc mniejsze od AB. Wykazaliśmy jednak, że nie jest też równe. AC jest więc większe od AB.

W dowolnym trójkącie naprzeciw większego kąta leży więc większy bok.

Co należało wykazać.

20

Dwa dowolnie wybrane boki dowolnego trójkąta są większe od pozostałego boku.

Niech bowiem ABC będzie trójkątem. Twierdzę, że dwa dowolnie wybrane boki trójkąta ABC są większe od pozostałego boku: mianowicie BA, AC większe od BC; AB, BC – od AC; BC, CA – od AB.

Doprowadźmy bowiem BA do punktu D i połóżmy AD równe CA. Pociągnijmy też prostą DC. Ponieważ DA jest równe AC, to również kąt ADC jest równy kątowi ACD. Kąt BCD jest więc większy od ADC. A ponieważ trójkąt DCB ma kąt BCD większy od kąta BDC, naprzeciw zaś większego kąta leży większy bok, to prosta DB jest większa od DC. DA jest zaś równe AC. Boki BA, AC są więc większe od BC. Podobnie możemy wykazać, że również AB, BC są większe od CA, a BC, CA – od AB.

Dwa dowolnie wzięte boki dowolnego trójkąta są więc większe od pozostałego boku.

Co należało wykazać.

21

Jeśli na jednym z boków trójkąta skonstruować z krańców <tego boku> dwie proste zbiegające się wewnątrz <trójkąta>, to skonstruowane proste będą mniejsze od pozostałych boków, będą natomiast zawierać większy kąt.

Skonstruujmy bowiem na boku BC trójkąta ABC z krańców B, C dwie proste BD, DC zbiegające się wewnątrz <trójkąta>. Twierdzę, że BD, DC są mniejsze od pozostałych dwu boków trójkąta BA, AC; zawierają natomiast kąt BDC większy od kąta BAC.

Doprowadźmy bowiem BD do punktu E. Ponieważ dwa boki dowolnego trójkąta są większe od pozostałego boku, to dwa boki AB, AE trójkąta ABE są większe od BE. Dodajmy wspólne EC; proste BA, AC są więc większe od BE, EC. Dalej, skoro dwa boki CE, ED trójkąta CED są większe od CD, dodajmy wspólne DB: proste CE, EB są więc większe od CD, DB. Wykazaliśmy jednak, że proste BA, AC są większe od BE, EC. Proste BA, AC są więc znacznie większe od BD, DC.

Dalej, ponieważ kąt zewnętrzny względem dowolnego trójkąta jest większy od naprzeciwległego kąta wewnętrznego, to kąt BDC zewnętrzny względem trójkąta CDE jest większy od kąta CED. Z tego samego powodu również kąt CEB zewnętrzny względem trójkąta ABE jest większy od kąta BAC. Wykazaliśmy jednak, że kąt BDC jest większy od kąta CEB. Kąt BDC jest więc znacznie większy od kąta BAC.

Jeśli więc na jednym z boków trójkąta skonstruować z krańców <tego boku> dwie proste zbiegające się wewnątrz <trójkąta>, to skonstruowane proste będą mniejsze od pozostałych boków, będą natomiast zawierać większy kąt. Co należało wykazać.

22

Z trzech prostych równych trzem danym skonstruować trójkąt. Trzeba zatem, żeby dwie dowolnie wybrane były większe od pozostałej [gdyż dwa dowolnie wzięte boki dowolnego trójkąta są większe od pozostałego boku].

Niech danymi trzema prostymi będą A, B, C, z których dwie dowolnie wybrane niech będą większe od pozostałej, mianowicie A, B niech będą większe od C; A, C – od B; i jeszcze B, C – od A. Należy teraz z prostych równych prostym A, B, C skonstruować trójkąt.

Wystawmy pewną prostą DE kończącą się w punkcie D, ale nieograniczoną w stronę punktu E. Połóżmy DF równe A, FG równe B, GH równe C. Narysujmy koło DJK o środku F i promieniu FD. Dalej, narysujmy koło JKH o środku G i promieniu GH. Pociągnijmy proste JF, JG. Twierdzę, że skonstruowaliśmy trójkąt JFG z trzech prostych równych prostym A, B, C.

Skoro bowiem punkt F jest środkiem koła DJK, to FD jest równe FJ; ale FD jest równe A. Również JF jest więc równe A. Dalej, ponieważ punkt G jest środkiem koła KJH, GH jest równe GJ; ale GH jest równe C. Również JG jest więc równe C. Ale i FG jest równe B. Trzy proste JF, FG, GJ są więc równe trzem prostym A, B, C.

Z trzech prostych JF, FG, GJ równych trzem danym prostym A, B, C skonstruowaliśmy więc trójkąt JFG. Co należało wykonać.

23

W danym punkcie na danej prostej skonstruować kąt prostoliniowy równy danemu kątowi prostoliniowemu.

Niech daną prostą będzie AB, punktem na niej A, a danym kątem prostoliniowym DCE. Należy teraz w punkcie A na danej prostej AB skonstruować kąt prostoliniowy równy danemu kątowi prostoliniowemu DCE.

Na obu prostych CD, CE weźmy dowolne punkty D, E i pociągnijmy DE. Z trzech prostych równych trzem prostym CD, DE, EC skonstruujmy trójkąt AFG, tak, aby CD było równe AF, CE – AG, i jeszcze DE – FG.

Ponieważ dwie proste DC, CE są równe odpowiednio dwu prostym FA, AG, a podstawa DE – równa podstawie FG, to kąt DCE jest równy kątowi FAG.

W danym punkcie A na danej prostej AB skonstruowaliśmy więc kąt prostoliniowy FAG równy danemu kątowi prostoliniowemu DCE. Co należało wykonać.

24

Jeśli dwa trójkąty mają dwa boki <jednego> równe odpowiednio dwu bokom <drugiego>, a <jeden> ma kąt zawarty między tymi równymi prostymi większy niż kąt <drugiego>, to ma też podstawę większą niż podstawa <drugiego>.

Niech dwa trójkąty ABC, DEF mają dwa boki <jednego> AB, AC równe odpowiednio dwu bokom <drugiego> DE, DF, mianowicie AB równe DE i AC równe DF, i niech kąt przy A będzie większy od kąta przy D. Twierdzę, że również podstawa BC jest większa od podstawy EF.

Skoro bowiem kąt BAC jest większy od kąta EDF, to skonstruujmy w punkcie D na prostej DE kąt EDG równy kątowi BAC. Połóżmy DG równe każdemu z AC, DF. Pociągnijmy EG, FG. Ponieważ AB jest równe DE, a AC – DG, to dwie proste BA, AC są równe odpowiednio dwu prostym ED, DG. Również kąt BAC jest równy kątowi EDG. Podstawa BC jest więc równa podstawie EG. Dalej, ponieważ DF jest równe DG, to również kąt DGF jest równy kątowi DFG. Kąt DFG jest więc większy od kąta EGF. Kąt EFG jest więc znacznie większy od kąta EGF. A ponieważ trójkąt EFG ma kąt EFG większy od kąta EGF, naprzeciw zaś większego kąta leży większy bok, to bok EG jest większy od EF. EG jest zaś równe BC. BC jest więc większe od EF.

Jeśli więc dwa trójkąty mają dwa boki <jednego> równe odpowiednio dwu bokom <drugiego>, a <jeden> ma kąt zawarty między tymi równymi prostymi większy niż kąt <drugiego>, to ma też podstawę większą niż podstawa <drugiego>. Co należało wykazać.

25

Jeśli dwa trójkąty mają dwa boki <jednego> równe odpowiednio dwu bokom <drugiego>, a <jeden> ma podstawę większą niż podstawa <drugiego>, to ma też kąt zawarty między równymi prostymi większy niż <odpowiedni> kąt <drugiego>.

Niech dwa trójkąty ABC, DEF mają dwa boki <jednego> AB, AC równe odpowiednio dwu bokom <drugiego> DE, DF, mianowicie AB równe DE, a AC – DF. Podstawa BC niech zaś będzie większa od podstawy EF. Twierdzę, że również kąt BAC jest większy od kąta EDF.

Jeśli bowiem nie, to jest albo mu równy, albo mniejszy. Otóż kąt BAC nie jest równy kątowi EDF. Również podstawa BC byłaby bowiem równa podstawie EF, a nie jest. Kąt BAC nie jest więc równy kątowi EDF. Kąt BAC nie jest też bynajmniej mniejszy od EDF. Również podstawa BC byłaby bowiem mniejsza od podstawy EF, a nie jest. Kąt BAC nie jest więc mniejszy od kąta EDF. Wykazaliśmy jednak, że nie jest też mu równy. Kąt BAC jest więc większy od EDF.

Jeśli więc dwa trójkąty mają dwa boki <jednego> równe odpowiednio dwu bokom <drugiego>, a <jeden> ma podstawę większą niż podstawa <drugiego>, to ma też kąt zawarty między równymi prostymi większy niż <odpowiedni> kąt <drugiego>. Co należało wykazać.

26

Jeśli dwa trójkąty mają dwa kąty <jednego> równe odpowiednio dwu kątom <drugiego> oraz jeden bok <jednego> równy jednemu bokowi <drugiego> – albo ten przy równych kątach, albo leżący naprzeciw jednego z równych kątów – to mają też pozostałe boki <jednego> równe odpowiednio pozostałym bokom <drugiego> i równe pozostałe kąty.

Niech dwa trójkąty ABC, DEF mają dwa kąty <jednego> ABC, BCA równe odpowiednio dwu <kątom drugiego> DEF, EFD, mianowicie kąt ABC – kątowi DEF, a kąt BCA – kątowi EFD. Niech mają również jeden bok <jednego> równy jednemu bokowi <drugiego>, najpierw ten przy równych kątach: BC równy EF. Twierdzę, że będą miały pozostałe boki <jednego> równe odpowiednio pozostałym bokom <drugiego>, mianowicie AB równe DE, a AC – DF, i równe pozostałe kąty: kąt BAC — kątowi EDF.

Jeśli bowiem AB jest nierówne DE, jedno z nich jest większe. Niech większym będzie AB. Połóżmy BG równe DE i pociągnijmy GC. Ponieważ BG jest równe DE, a BC – EF, to dwie proste BG, BC są równe odpowiednio dwu prostym DE, EF. Również kąt GBC jest równy kątowi DEF. Podstawa GC jest więc równa podstawie DF, trójkąt GBC jest równy trójkątowi DEF i pozostałe kąty będą równe pozostałym kątom – te, które leżą naprzeciw równych boków. Kąt GCB jest więc równy kątowi DFE. Ale kąt DFE jest z założenia równy kątowi BCA. Również kąt BCG jest więc równy kątowi BCA, czyli mniejszy większemu; co jest niemożliwe. AB nie jest więc nierówne DE. Jest więc równe. Ale i BC jest równe EF. Dwie proste AB, BC są zatem równe odpowiednio dwu prostym DE, EF. Również kąt ABC jest równy kątowi DEF. Podstawa AC jest więc równa podstawie DF i pozostały kąt BAC jest równy pozostałemu kątowi EDF.

Teraz natomiast, dalej, niech równe będą boki leżące naprzeciw równych kątów, jak AB i DE. Twierdzę znów, że również pozostałe boki będą równe pozostałym bokom, mianowicie AC równy DF, a BC – EF, i jeszcze pozostały kąt BAC jest równy pozostałemu kątowi EDF.

Jeśli bowiem BC jest nierówne EF, jedno z nich jest większe. Niech większym, jeśli to możliwe, będzie BC. Połóżmy BH równe EF i pociągnijmy AH. Ponieważ BH jest równe EF, a AB – DE, to dwie proste AB, BH są równe odpowiednio dwu prostym DE, EF. Zawierają też równe kąty. Podstawa AH jest więc równa podstawie DF i trójkąt ABH jest równy trójkątowi DEF i pozostałe kąty będą równe pozostałym kątom – te, które leżą naprzeciw równych boków. Kąt BHA jest więc równy kątowi EFD. Ale kąt EFD jest równy kątowi BCA. Kąt BHA zewnętrzny względem trójkąta AHC jest zatem równy wewnętrznemu kątowi naprzeciwległemu BCA; co jest niemożliwe. BC nie jest więc nierówne EF. Jest więc równe. Ale i AB jest równe DE. Dwie proste AB, BC są zatem równe odpowiednio dwu prostym DE, EF. Zawierają też równe kąty. Podstawa AC jest więc równa podstawie DF, trójkąt ABC trójkątowi DEF i pozostały kąt BAC pozostałemu kątowi EDF.

Jeśli więc dwa trójkąty mają dwa kąty <jednego> równe odpowiednio dwu kątom <drugiego> oraz jeden bok <jednego> równy jednemu bokowi <drugiego> – albo ten przy równych kątach, albo leżący naprzeciw jednego z równych kątów – to mają też pozostałe boki <jednego> równe pozostałym bokom <drugiego> i równe pozostałe kąty. Co należało wykazać.

27

Jeśli prosta opadająca na dwie proste tworzy wzajemnie sobie równe kąty naprzemianległe, to te proste są równoległe.

Niech bowiem prosta EF opadająca na dwie proste AB, CD tworzy wzajemnie sobie równe kąty naprzemianległe AEF, EFD. Twierdzę, że prosta AB jest równoległa do CD.

Jeśli bowiem nie, to przedłużone proste AB, CD zbiegną się albo po stronie punktów B, D, albo po stronie punktów A, C. Przedłużmy je i niech się zbiegają po stronie punktów B, D w punkcie G.

Kąt AEF zewnętrzny względem trójkąta GEF jest zatem równy naprzeciwległemu kątowi wewnętrznemu EFG; co jest niemożliwe. Przedłużone proste AB, CD nie zbiegną się więc po stronie punktów B, D. Podobnie możemy wykazać, że również nie po stronie punktów A, C. Proste nie zbiegające się z żadnej strony są zaś równoległe. Prosta AB jest więc równoległa do CD.

Jeśli więc prosta opadająca na dwie proste tworzy wzajemnie sobie równe kąty naprzemianległe, to te proste są równoległe. Co należało wykazać.

28

Jeśli prosta opadająca na dwie proste tworzy kąt zewnętrzny równy naprzeciwległemu kątowi wewnętrznemu po tej samej stronie albo kąty wewnętrzne po jednej stronie równe dwu kątom prostym, to te proste są równoległe.

Niech bowiem prosta EF opadająca na dwie proste AB, CD tworzy kąt zewnętrzny EGB równy naprzeciwległemu kątowi wewnętrznemu GHD albo kąty wewnętrzne po jednej stronie, BGH, GHD, równe dwu kątom prostym. Twierdzę, że prosta AB jest równoległa do CD.

Kiedy bowiem kąt EGB jest równy kątowi GHD – a kąt EGB jest równy kątowi AGH – również kąt AGH jest równy kątowi GHD, a są to kąty naprzemianległe. Prosta AB jest więc równoległa do CD.

Dalej, kiedy kąty BGH, GHD są równe dwu kątom prostym – a i kąty AGH, BGH są równe dwu kątom prostym – to kąty AGH, BGH są równe kątom BGH, GHD. Odejmijmy wspólny kąt BGH: pozostały kąt AGH jest więc równy kątowi GHD, a są to kąty naprzemianległe. Prosta AB jest więc równoległa do CD.

Jeśli więc prosta opadająca na dwie proste tworzy kąt zewnętrzny równy naprzeciwległemu kątowi wewnętrznemu po tej samej stronie, albo kąty wewnętrzne po jednej stronie równe dwu kątom prostym, to te proste są równoległe. Co należało wykazać.

29

Prosta opadająca na proste równoległe tworzy wzajemnie sobie równe kąty naprzemianległe, kąt zewnętrzny równy naprzeciwległemu kątowi wewnętrznemu i kąty wewnętrzne po jednej stronie równe dwu kątom prostym.

Niech bowiem prosta EF opada na równoległe proste AB, CD. Twierdzę, że tworzy ona wzajemnie sobie równe naprzemianległe kąty AGH, GHD, kąt zewnętrzny EGB równy naprzeciwległemu kątowi wewnętrznemu GHD i kąty wewnętrzne po jednej stronie, BGH, GHD, równe dwu kątom prostym.

Jeśli bowiem kąt AGH jest nierówny kątowi GHD, to jeden z nich jest większy. Niech większym będzie kąt AGH. Dodajmy wspólny kąt BGH: kąty AGH, BGH są więc większe od kątów BGH, GHD. Ale kąty AGH, BGH są równe dwu kątom prostym. Kąty BGH, GHD są więc mniejsze od dwu kątów prostych. Proste przedłużone nieskończenie z kątów mniejszych od dwu kątów prostych zbiegają się. Przedłużone więc nieskończenie proste AB, CD zbiegną się.

Nie zbiegają się jednak, gdyż założyliśmy, że są równoległe. Kąt AGH nie jest więc nierówny kątowi GHD. Jest więc równy. Ale kąt AGH jest równy kątowi EGB. Również kąt EGB jest więc równy kątowi GHD. Dodajmy wspólny kąt BGH: kąty EGB, BGH są więc równe kątom BGH, GHD. Ale kąty EGB, BGH są równe dwu kątom prostym. Również kąty BGH, GHD są więc równe dwu kątom prostym.

Prosta opadająca na proste równoległe tworzy więc wzajemnie sobie równe kąty naprzemianległe, kąt zewnętrzny równy naprzeciwległemu kątowi wewnętrznemu i kąty wewnętrzne po jednej stronie równe dwu kątom prostym. Co należało wykazać.

30

Proste równoległe do tej samej prostej są też równoległe do siebie nawzajem.

Niech obie proste AB, CD będą równoległe do prostej EF. Twierdzę, że prosta AB jest również równoległa do CD.

Niech bowiem opada na nie prosta GJ. Ponieważ prosta GJ opada na równoległe proste AB, EF, to kąt AGJ jest równy kątowi GHF. Dalej, ponieważ prosta GJ opada na równoległe proste EF, CD, to kąt GHF jest równy kątowi GJD. Wykazaliśmy jednak, że również kąt AGJ jest równy kątowi GHF. Również kąt AGJ jest więc równy kątowi GJD; a są to kąty naprzemianległe. Prosta AB jest więc równoległa do CD.

[Proste równoległe do tej samej prostej są więc też równoległe do siebie nawzajem.] Co należało wykazać.

31

Przez dany punkt poprowadzić prostą równoległą do danej prostej.

Niech danym punktem będzie A, a daną prostą BC. Należy teraz przez punkt A poprowadzić prostą równoległą do prostej BC.

Weźmy dowolny punkt D na prostej BC i pociągnijmy AD. Skonstruujmy w punkcie A na prostej AD kąt DAE równy kątowi ADC. Przedłużmy EA po prostej prostą AF. Ponieważ prosta AD opadająca na dwie proste BC, EF tworzy wzajemnie sobie równe naprzemianległe kąty EAD, ADC, to prosta EAF jest równoległa do BC.

Przez dany punkt A poprowadziliśmy więc prostą EAF równoległą do danej prostej BC. Co należało wykonać.

32

Po przedłużeniu jednego z boków dowolnego trójkąta kąt zewnętrzny jest równy dwu kątom wewnętrznym naprzeciwległym; a trzy kąty wewnętrzne trójkąta są równe dwu kątom prostym.

Niech ABC będzie trójkątem. Przedłużmy jeden z jego boków, BC, do punktu D. Twierdzę, że kąt zewnętrzny ACD jest równy dwu kątom wewnętrznym naprzeciwległym CAB, ABC, a trzy kąty wewnętrzne trójkąta, ABC, BCA, CAB, są równe dwu kątom prostym.

Poprowadźmy bowiem przez punkt C prostą CE równoległą do AB. Ponieważ prosta AB jest równoległa do CE, a opada na nie prosta AC, to naprzemianległe kąty BAC, ACE są sobie równe. Dalej, ponieważ AB jest równoległe do CE, a opada na nie prosta BD, to kąt zewnętrzny ECD jest równy naprzeciwległemu kątowi wewnętrznemu ABC. Wykazaliśmy jednak, że również kąt ACE jest równy kątowi BAC. Cały kąt ACD jest więc równy dwu kątom wewnętrznym naprzeciwległym BAC, ABC. Dodajmy wspólny kąt ACB: kąty ACD, ACB są więc równe trzem kątom ABC, BCA, CAB. Ale kąty ACD, ACB są równe dwu kątom prostym. Również kąty ACB, CBA, CAB są więc równe dwu kątom prostym.

Po przedłużeniu jednego z boków dowolnego trójkąta kąt zewnętrzny jest więc równy dwu kątom wewnętrznym naprzeciwległym; a trzy kąty wewnętrzne trójkąta są równe dwu kątom prostym.. Co należało wykazać.

33

Proste łączące proste równe i równoległe, każda z jednej strony, same są równe i równoległe.

Niech proste AB, CD będą równe i równoległe, i niech łączą je proste AC, BD, każda z jednej strony. Twierdzę, że również proste AC, BD są równe i równoległe.

Pociągnijmy prostą BC. Ponieważ prosta AB jest równoległa do prostej CD, a opada na nie prosta BC, naprzemianległe kąty ABC, BCD są sobie równe. Ponieważ AB jest równe CD, a BC jest wspólne, to dwie proste AB, BC są równe dwu prostym BC, CD; a kąt ABC jest równy BCD. Podstawa AC jest więc równa podstawie BD, trójkąt ABC jest równy trójkątowi BCD i pozostałe kąty będą równe pozostałym kątom – odpowiednio te, które leżą naprzeciwko równych boków. Kąt ACB jest więc równy kątowi CBD. Ponieważ prosta BC opadająca na dwie proste AC, BD tworzy wzajemnie sobie równe kąty naprzemianległe, to prosta AC jest równoległa do BD. Wykazaliśmy jednak, że jest też jej równa.

Proste łączące proste równe i równoległe, każda z jednej strony, same są więc równe i równoległe. Co należało wykazać.

34

Zarówno naprzeciwległe boki, jak i naprzeciwległe kąty obszarów równoległobocznych są sobie równe, a średnica dzieli obszary równoległoboczne na pół.

Niech ACDB będzie obszarem równoległobocznym, a BC – jego średnicą. Twierdzę, że naprzeciwległe boki i naprzeciwległe kąty równoległoboku ACDB są sobie równe, a średnica BC dzieli go na pół.

Skoro bowiem prosta AB jest równoległa do prostej CD, a opada na nie prosta BC, to naprzemianległe kąty ABC, BCD są sobie równe. Dalej, skoro prosta AC jest równoległa do BD, a opada na nie BC, to naprzemianległe kąty ACB, CBD są sobie równe. Dwa trójkąty ABC, BCD mają zatem dwa kąty <jednego> ABC, BCA równe odpowiednio dwu kątom <drugiego> BCD, CBD i jeden bok <jednego> równy jednemu bokowi <drugiego>, ten przy równych kątach – wspólny im bok BC. Będą więc też miały pozostałe boki <jednego> równe odpowiednio pozostałym bokom <drugiego> i równe pozostałe kąty. Bok AB jest więc równy CD, AC równy BD i jeszcze kąt BAC jest równy kątowi CDB. Ponieważ kąt ABC jest równy BCD, a kąt CBD kątowi ACB, cały kąt ABD jest więc równy całemu kątowi ACD. Wykazaliśmy jednak, że również kąt BAC jest równy kątowi CDB. Zarówno naprzeciwległe boki, jak i naprzeciwległe kąty powierzchni równoległobocznych są więc sobie równe.

Twierdzę teraz, że średnica dzieli obszar równoległoboczny na pół.

Skoro bowiem AB jest równe CD, a BC jest wspólne, to dwie proste AB, BC są równe odpowiednio dwu prostym CD, BC; a kąt ABC jest równy kątowi BCD. Również podstawa AC jest więc równa podstawie DB i trójkąt ABC jest równy trójkątowi BCD.

Średnica BC dzieli więc na pół równoległobok ABCD. Co należało wykazać.

35

Równoległoboki leżące na tej samej podstawie i w tych samych równoległych są sobie równe.

Niech równoległoboki ABCD, EBCF leżą na tej samej podstawie BC i w tych samych równoległych AF, BC. Twierdzę, że równoległobok ABCD jest równy równoległobokowi EBCF.

Skoro bowiem ABCD jest równoległobokiem, to AD jest równe BC. Z tego samego powodu również EF jest równe BC; stąd i AD jest równe EF, a DE jest wspólne. Cała prosta AE jest więc równa całej prostej DF. Ale i prosta AB jest równa DC. Dwie proste EA, AB są zatem równe odpowiednio dwu prostym FD, DC; a kąt FDC jest równy kątowi EAB – zewnętrzny wewnętrznemu. Podstawa EB jest więc równa podstawie FC i trójkąt EAB będzie równy trójkątowi DFC. Odejmijmy wspólny trójkąt DGE: pozostały czworobok ABGD jest więc równy pozostałemu czworobokowi EGCF. Dodajmy wspólny trójkąt GBC: cały równoległobok ABCD jest więc równy całemu równoległobokowi EBCF.

Równoległoboki leżące na tej samej podstawie i w tych samych równoległych są więc sobie równe.

Co należało wykazać.

36

Równoległoboki leżące na równych podstawach i w tych samych równoległych są sobie równe.

Niech równoległoboki ABCD, EFGH leżą na równych podstawach BC, FG i między tymi samymi równoległymi AH, BG. Twierdzę, że równoległobok ABCD jest równy EFGH.

Pociągnijmy bowiem proste BE, CH. Ponieważ prosta BC jest równa FG – a FG jest równe EH – również BC jest równe EH. Ale są też równoległe i łączą je proste EB, HC. Proste zaś łączące proste równe i równoległe, każda z jednej strony, same są równe i równoległe. EBCH jest więc równoległobokiem i jest równe ABCD: ma bowiem tę samą podstawę BC i leży w tych samych równoległych BC, AH. Z tego samego powodu również EFGH jest równe temuż EBCH. Stąd i równoległobok ABCD jest równy EFGH.

Równoległoboki leżące na równych podstawach i w tych samych równoległych są więc sobie równe.

Co należało wykazać.

37

Trójkąty leżące na tej samej podstawie i w tych samych równoległych są sobie równe.

Niech trójkąty ABC, DBC leżą na tej samej podstawie BC i w tych samych równoległych AD, BC. Twierdzę, że trójkąt ABC jest równy trójkątowi DBC.

Przedłużmy prostą AD po obu stronach do punktów E, F i poprowadźmy przez punkt B prostą BE równoległą do CA, a przez punkt C prostą CF równoległą do BD. Zarówno EBCA, jak i DBCF są więc równoległobokami. Są też równe: leżą bowiem na tej samej podstawie BC i w tych samych równoległych BC, EF. Trójkąt ABC jest połową równoległoboku EBCA. Średnica AB dzieli bowiem ten równoległobok na pół. Trójkąt DBC jest zaś połową równoległoboku DBCF. Średnica DC dzieli bowiem ten równoległobok na pół. Połowy tego samego są zaś sobie równe. Trójkąt ABC jest więc równy trójkątowi DBC.

Trójkąty leżące na tej samej podstawie i w tych samych równoległych są więc sobie równe. Co należało wykazać.

38

Trójkąty leżące na równych podstawach i w tych samych równoległych są sobie równe.

Niech trójkąty ABC, DEF leżą na równych podstawach BC, EF i w tych samych równoległych BF, AD. Twierdzę, że trójkąt ABC jest równy trójkątowi DEF.

Przedłużmy bowiem prostą AD po obu stronach do punktów G, H. Poprowadźmy przez punkt B prostą BG równoległą do CA, a przez punkt F prostą FH równoległą do DE. Zarówno GBCA jak i DEFH są więc równoległobokami. GBCA jest też równe DEFH: leżą bowiem na równych podstawach BC, EF i w tych samych równoległych BF, GH. Trójkąt ABC jest połową równoległoboku GBCA. Średnica AB dzieli bowiem ten równoległobok na pół. Trójkąt FED jest zaś połową równoległoboku DEFH. Średnica DF dzieli bowiem ten równoległobok na pół. Połowy tego samego są zaś sobie równe. Trójkąt ABC jest więc równy trójkątowi DEF.

Trójkąty leżące na równych podstawach i w tych samych równoległych są więc sobie równe. Co należało wykazać.

39

Równe trójkąty leżące na tej samej podstawie po tej samej stronie leżą również w tych samych równoległych.

Niech równe trójkąty ABC, DBC leżą na tej samej podstawie BC po tej samej stronie. Pociągnijmy prostą AD. Twierdzę, że prosta AD jest równoległa do BC.

Jeśli bowiem nie, to poprowadźmy przez punkt A prostą AE równoległą do BC i pociągnijmy EC. Trójkąt ABC jest równy trójkątowi EBC: leży bowiem na tej samej podstawie BC i w tych samych równoległych. Ale trójkąt ABC jest równy DBC. Również trójkąt DBC jest więc równy trójkątowi EBC, czyli większy mniejszemu; co jest niemożliwe. Prosta AE nie jest więc równoległa do BC. Podobnie możemy wykazać, że i żadna inna, prócz AD. AD jest więc równoległa do BC.

Równe trójkąty leżące na tej samej podstawie po tej samej stronie leżą więc również w tych samych równoległych. Co należało wykazać.

[40

Równe trójkąty leżące na równych podstawach po tej samej stronie leżą również w tych samych równoległych.

Niech równe trójkąty ABC, CDE leżą na równych podstawach BC, CE po tej samej stronie. Twierdzę, że leżą również w tych samych równoległych.

Pociągnijmy bowiem prostą AD. Twierdzę, że prosta AD jest równoległa do BE.

Jeśli bowiem nie, to poprowadźmy przez punkt A prostą AF równoległą do BE i pociągnijmy FE. Trójkąt ABC jest równy trójkątowi FCE, leżą bowiem na równych podstawach BC, CE i w tych samych równoległych BE, AF. Ale trójkąt ABC jest równy trójkątowi DCE. Również trójkąt DCE jest więc równy FCE, czyli większy mniejszemu; co jest niemożliwe. Prosta AF nie jest więc równoległa do BE. Podobnie możemy wykazać, że i żadna inna, oprócz AD. Prosta AD jest więc równoległa do BE.

Równe trójkąty leżące na równych podstawach po tej samej stronie, leżą więc również w tych samych równoległych. Co należało wykazać.]

41

Jeśli równoległobok i trójkąt mają tę samą podstawę i leżą w tych samych równoległych, to równoległobok jest dwukrotnością trójkąta.

Niech bowiem równoległobok ABCD i trójkąt EBC mają tę samą podstawę BC i leżą w tych samych równoległych BC, AE. Twierdzę, że równoległobok ABCD jest dwukrotnością trójkąta BEC.

Pociągnijmy bowiem prostą AC. Trójkąt ABC jest równy trójkątowi EBC, leży bowiem na tej samej podstawie BC i w tych samych równoległych BC, AE. Ale równoległobok ABCD jest dwukrotnością trójkąta ABC. Średnica AC dzieli go bowiem na pół. Stąd równoległobok ABCD jest również dwukrotnością trójkąta EBC.

Jeśli więc równoległobok i trójkąt mają tę samą podstawę i leżą w tych samych równoległych, to równoległobok jest dwukrotnością trójkąta. Co należało wykazać.

42

Skonstruować równy danemu trójkątowi równoległobok z danym kątem prostoliniowym.

Niech danym trójkątem będzie ABC, a danym kątem prostoliniowym D. Należy teraz skonstruować równy trójkątowi ABC równoległobok z kątem prostoliniowym D.

Podzielmy prostą BC na pół punktem E i pociągnijmy prostą AE. Skonstruujmy w punkcie E na prostej EC kąt CEF równy kątowi D. Poprowadźmy przez punkt A prostą AG równoległą do EC, a przez punkt C poprowadźmy prostą CG równoległą do EF. FECG jest więc równoległobokiem. Ponieważ prosta BE jest równa EC, to również trójkąt ABE jest równy trójkątowi AEC. Leżą bowiem na równych podstawach BE, EC i w tych samych równoległych BC, AG. Trójkąt ABC jest więc dwukrotnością trójkąta AEC. Ale i równoległobok FECG jest dwukrotnością trójkąta AEC. Ma bowiem tę samą podstawę i leży w tych samych równoległych. Równoległobok FECG jest więc równy trójkątowi ABC; ma też kąt CEF równy danemu kątowi D.

Skonstruowaliśmy więc równy trójkątowi ABC równoległobok FECG z kątem CEF, który jest równy kątowi D. Co należało wykonać.

43

W dowolnym równoległoboku dopełnienia równoległoboków wokół średnicy są sobie równe.

Niech ABCD będzie równoległobokiem, AC – jego średnicą, niech EH, FG będą równoległobokami wokół AC, a BJ, JD – tak zwanymi dopełnieniami. Twierdzę, że dopełnienie BJ jest równe dopełnieniu JD.

Skoro bowiem ABCD jest równoległobokiem, a AC jego średnicą, to trójkąt ABC jest równy trójkątowi ACD. Dalej, skoro EH jest równoległobokiem, a AJ – jego średnicą, to trójkąt AEJ jest równy trójkątowi AHJ. Z tego samego powodu trójkąt JFC jest równy trójkątowi JGC. Ponieważ trójkąt AEJ jest równy trójkątowi AHJ, a JFC – JGC, to trójkąt AEJ razem z JGC jest równy trójkątowi AHJ razem z JFC. Ale i cały trójkąt ABC jest równy całemu ADC. Pozostałe dopełnienie BJ jest więc równe pozostałemu dopełnieniu JD.

W dowolnym równoległoboku dopełnienia równoległoboków wokół średnicy są więc sobie równe. Co należało wykazać.

44

Do danej prostej przyłożyć równy danemu trójkątowi równoległobok z danym kątem prostoliniowym.

Niech daną prostą będzie AB, danym trójkątem C, a danym kątem prostoliniowym D. Należy teraz do danej prostej AB przyłożyć równy danemu trójkątowi C równoległobok z kątem równym kątowi D.

Skonstruujmy równy trójkątowi C równoległobok BEFG z kątem EBG, który jest równy kątowi D. Położmy go tak, aby BE było na wspólnej prostej z AB. Doprowadźmy prostą FG do punktu H, poprowadźmy przez punkt A prostą AH równoległą do każdej z prostych BG, EF i pociągnijmy prostą HB. Ponieważ na równoległe proste AH, EF opadła prosta HF, to kąty AHF, HFE są równe dwu kątom prostym. Kąty BHG, GFE są więc mniejsze od dwu kątów prostych. Proste przedłużone nieskończenie z kątów mniejszych od dwu kątów prostych zbiegają się. Przedłużone więc proste HB, FE zbiegną się. Przedłużmy je i niech zbiegają się w punkcie J. Przez punkt J poprowadźmy prostą JK równoległą do każdej z prostych EA, FH. Przedłużmy proste HA, GB do punktów K, L. HKJF jest więc równoległobokiem, prosta HJ – jego średnicą, AG, LE – równoległobokami wokół HJ, a KB, BF – tak zwanymi dopełnieniami. Dopełnienie KB jest więc równe BF. Ale równoległobok BF jest równy trójkątowi C; również KB jest więc równe trójkątowi C. A ponieważ kąt GBE jest równy kątowi ABL – a kąt GBE jest równy kątowi D, to również kąt ABL jest równy D.

Do danej prostej AB przyłożyliśmy więc równy danemu trójkątowi C równoległobok KB z kątem ABL, który jest równy kątowi D. Co należało wykonać.

45

Skonstruować równy danej figurze prostoliniowej równoległobok z danym kątem prostoliniowym.

Niech daną figurą prostoliniową będzie ABCD, a danym kątem prostoliniowym E. Należy teraz skonstruować równy figurze prostoliniowej ABCD równoległobok z danym kątem E.

Pociągnijmy DB i skonstruujmy równy trójkątowi ABD równoległobok FH z kątem HJF, który jest równy kątowi E. Przyłóżmy do prostej GH równy trójkątowi DBC równoległobok GL z kątem GHL, który jest równy kątowi E. Ponieważ kąt E jest równy każdemu z kątów HJF, GHL, to również kąt HJF jest równy kątowi GHL. Dodajmy wspólny kąt JHG: kąty FJH, JHG są więc równe kątom JHG, GHL. Ale kąty FJH, JHG są równe dwu kątom prostym. Również kąty JHG, GHL są więc równe dwu kątom prostym. Dwie proste JH, HL nie leżące po tej samej stronie pewnej prostej GH tworzą zatem w punkcie H na tej prostej przylegające kąty równe dwu kątom prostym. Proste JH, HL leżą więc na wspólnej prostej. Ponieważ na równoległe proste JL, FG opadła prosta HG, to naprzemianległe kąty LHG, HGF są sobie równe. Dodajmy wspólny kąt HGK: kąty LHG, HGK są równe kątom HGF, HGK. Ale kąty LHG, HGK są równe dwu kątom prostym. Również kąty HGF, HGK są więc równe dwu kątom prostym. Proste FG, GK leżą więc na wspólnej prostej. Ponieważ prosta FJ jest równa i równoległa do prostej HG – a HG równa i równoległa do LK – również prosta JF jest równa i równoległa do LK. Łączą je zaś proste JL, FK. Również proste JL, FK są więc równe i równoległe. JFKL jest więc równoległobokiem. Ponieważ trójkąt ABD jest równy równoległobokowi FH, a trójkąt DBC równoległobokowi GL, to cała figura prostoliniowa ABCD jest równa całemu równoległobokowi JFKL.

Skonstruowaliśmy więc równy danej figurze prostoliniowej ABCD równoległobok JFKL z kątem FJL, który jest równy danemu kątowi E. Co należało wykonać.

46

Na danej prostej wyrysować kwadrat.

Niech daną prostą będzie AB. Należy teraz na prostej AB wyrysować kwadrat.

Poprowadźmy z punktu A na prostej AB prostą AC pod kątem prostym i połóżmy AD równe AB. Poprowadźmy przez punkt D prostą DE równoległą do AB, a przez punkt B – prostą BE równoległą do AD. ADEB jest więc równoległobokiem. Prosta AB jest więc równa DE, a AD – BE. Ale prosta AB jest równa AD. Cztery proste BA, AD, DE, EB są więc sobie równe. Równoległobok ADEB jest więc równoboczny.

Twierdzę teraz, że jest też prostokątny.

Skoro bowiem na równoległe proste AB, DE opadła prosta AD, to kąty BAD, ADE są równe dwu kątom prostym. Kąt BAD jest jednak kątem prostym. Również kąt ADE jest więc kątem prostym. Zarówno zaś naprzeciwległe boki, jak i naprzeciwległe kąty obszarów równoległobocznych są sobie równe. Również oba naprzeciwległe kąty ABE, BED są więc kątami prostymi. Równoległobok ADEB jest więc prostokątny. Wykazaliśmy jednak, że jest też równoboczny.

Jest więc kwadratem. Jest również wyrysowany na prostej AB. Co należało wykonać.

47

W trójkątach prostokątnych kwadrat na boku leżącym naprzeciw kąta prostego jest równy kwadratom na bokach zawierających kąt prosty.

Niech trójkąt prostokątny ABC ma kąt prosty BAC. Twierdzę, że kwadrat na prostej BC jest równy kwadratom na prostych BA, AC.

Wyrysujmy bowiem na prostej BC kwadrat BDEC, a na prostych BA, AC kwadraty GB, HC. Poprowadźmy przez punkt A prostą AK równoległą do każdej z prostych BD, CE. Pociągnijmy proste AD, FC.

Ponieważ oba kąty BAC, BAG są kątami prostymi, to dwie proste AC, AG nie leżące po tej samej stronie pewnej prostej BA tworzą w punkcie A na tej prostej przylegające kąty równe dwu kątom prostym. Proste CA, AG leżą więc na wspólnej prostej. Z tego samego powodu również proste BA, AH leżą na wspólnej prostej. Skoro kąt DBC jest równy kątowi FBA – oba są bowiem kątami prostymi – dodajmy wspólny kąt ABC: cały kąt DBA jest więc równy całemu kątowi FBC. A ponieważ prosta DB jest równa BC, a FB – BA, to dwie proste DB, BA są równe odpowiednio dwu prostym FB, BC; a kąt DBA jest równy kątowi FBC. Podstawa AD jest więc równa podstawie FC i trójkąt ABD jest równy trójkątowi FBC, a równoległobok BK jest dwukrotnością trójkąta ABD: mają bowiem tę samą podstawę BD i leżą w tych samych równoległych BD, AK. Kwadrat GB jest zaś dwukrotnością trójkąta FBC. Znów bowiem, mają tę samą podstawę FB i leżą w tych samych równoległych FB, GC. Dwukrotności równych są zaś sobie równe. Równoległobok BK jest więc równy kwadratowi GB. Podobnie ciągnąc proste AE, BJ można wykazać, że również równoległobok CK jest równy kwadratowi HC. Cały kwadrat BDEC jest więc równy dwu kwadratom GB, HC. Kwadrat BDEC jest wyrysowany na prostej BC, kwadraty GB, HC zaś na prostych BA, AC. Kwadrat na boku BC jest więc równy kwadratom na bokach BA, AC.

W trójkątach prostokątnych kwadrat na boku leżącym naprzeciw kąta prostego jest więc równy kwadratom na bokach przylegających do kąta prostego. Co należało wykazać.

48

Jeśli w trójkącie kwadrat na jednym z boków jest równy kwadratom na pozostałych dwu bokach, to kąt zawarty między pozostałymi dwoma bokami trójkąta jest kątem prostym.

Niech bowiem w trójkącie ABC kwadrat na jednym z boków, BC, będzie równy kwadratom na bokach BA, AC. Twierdzę, że kąt BAC jest kątem prostym.

Poprowadźmy bowiem z punktu A na prostej AC prostą AD pod kątem prostym. Połóżmy AD równe BA i pociągnijmy prostą DC. Ponieważ DA jest równe AB, to również kwadrat na DA jest równy kwadratowi na AB. Dodajmy wspólny kwadrat na AC: kwadraty na DA, AC są więc równe kwadratom na BA, AC. Ale kwadratom na DA, AC równy jest kwadrat na DC. Kąt DAC jest bowiem kątem prostym. Kwadratom na BA, AC jest zaś równy kwadrat na BC, tak bowiem założyliśmy. Kwadrat na DC jest więc równy kwadratowi na BC. Stąd i bok DC jest równy BC. A ponieważ DA jest równe AB, a AC jest wspólne, to dwie proste DA, AC są równe dwu prostym BA, AC; również podstawa DC jest równa podstawie BC. Kąt DAC jest więc równy kątowi BAC. Kąt DAC jest zaś kątem prostym. Również kąt BAC jest więc kątem prostym.

Jeśli więc w trójkącie kwadrat na jednym z boków jest równy kwadratom na pozostałych dwu bokach, to kąt zawarty między pozostałymi dwoma bokami trójkąta jest prosty. Co należało wykazać.