Matematyka odwrotna — dwa uzupełnienia do ćwiczeń z 24 IV 2015

Dokończenie dowodu ($4 \Rightarrow 1$) z tw. IV.2.3 w Simpsonie

Pokazywaliśmy, że jeśli $\neg\mathsf{WKL}_0$, to istnieje jednostajnie ciągła funkcja ϕ z $[0,1]$ w $\mathbb{R}$, która nie ma supremum. W tym celu wzięliśmy T — nieskończone drzewo binarne bez ścieżki, zdefiniowaliśmy $\widetilde{T}$ oraz a_t, b_t dla $t \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$ jak we wcześniejszych tego typu przykładach, a korzystając z $\neg\mathsf{ACA}_0$ wzięliśmy ciąg $0 < c_0 < c_1 < c_2 \ldots < 1$ bez supremum.

Dla każdego $x \in [0,1]$ zachodzi jeden z dwu przypadków:

$$
\begin{array}{lll}
1^\circ & a_t \leqslant x \leqslant b_t, & t \in \widetilde{T}, \\
2^\circ & b_{t^\frown\langle 0\rangle} < x < b_{t^\frown\langle 1\rangle}, & t^\frown\langle 0\rangle, t^\frown\langle 1\rangle \in T \cup \widetilde{T}.
\end{array}
$$

W przypadku 1° definiowaliśmy $\phi(x) = c_{\mathrm{lh}(t)}$, a w przypadku 2° przez liniowość. Po ćwiczeniach pozostało do sprawdzenia, że ϕ jest jednostajnie ciągła.

Weźmy $\epsilon > 0$. Istnieje takie n, że $c_m - c_n < \epsilon/2$ dla $m \geqslant n$. Zauważmy, że jeśli przedział zawierający dane x ma $\mathrm{lh}(t) \geqslant n$, to $\phi(x) \geqslant c_n$ (niezależnie od tego, czy zachodzi przypadek 1°, czy 2°). Z drugiej strony, jeśli $\mathrm{lh}(t) < n$, to przedział odpowiadający x-owi ma długość $\geqslant 3^{-n}$, a więc współczynnik kierunkowy funkcji liniowej tożsamej z ϕ na tym przedziale jest co do modułu $\leqslant 3^n$ (bo wartości ϕ są między 0 a 1).

Mamy więc rozbicie $[0,1]$ na skończenie wiele przedziałów, takie że na każdym z tych przedziałów funkcja ϕ albo przyjmuje wartości $\geqslant c_n$, albo jest funkcją liniową o współczynniku kierunkowym $\leqslant 3^n$. Funkcja ϕ jest ponadto ciągła i nigdy nie przyjmuje wartości powyżej $c_n + \epsilon/2$. Łatwo zauważyć, że w takiej sytuacji wartości ϕ w punktach x, x' oddalonych od siebie o mniej niż $\delta = 1/(2 \cdot 3^n)$ będą się różniły o mniej niż ϵ.

Rozwiązanie zadania domowego nr 8

Zadanie. Niech $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą (tj. ϕ jest określona na całym $[0,1]$) daną przez kod $\Phi \subseteq \mathbb{N} \times (\mathbb{Q} \cap [0,1]) \times \mathbb{Q}_+ \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}_+$. Pokaż, że dowodliwie w WKL_0 istnieje funkcja $\widetilde{\phi}$ dana przez kod $\widetilde{\Phi}$ t. że $\forall x(\phi(x) = \widetilde{\phi}(x))$, ale wszystkie krotki występujące w $\widetilde{\Phi}$ mają na pierwszej współrzędnej liczbę 0.

Rozwiązanie pochodzące od Keity Yokoyamy. Poniższe rozwiązanie działa dla dowolnej ϕ: $\hat{A} \to \hat{B}$, danej przez $\Phi \subseteq \mathbb{N} \times A \times \mathbb{Q}_+ \times B \times \mathbb{Q}_+$ ($\hat{A}, \hat{B}$ to dowolne p.p.m, $\hat{A}$ niekoniecznie zwarte)!

Definiujemy drzewo T w taki sposób, że $t \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$ jest elementem T, jeśli dla dowolnych $i = \langle a, q, b, r\rangle, j = \langle a', q', b', r'\rangle$ t. że $i, j < \mathrm{lh}(t)$ zachodzi:

(0) jeśli istnieje $n < \mathrm{lh}(t)$ t. że $\langle n, a, q, b, r \rangle \in \Phi$, to $t(i) = 1$,

(1) jeśli $a = a', q = q'$, $d(b, b') > r + r'$ oraz $t(i) = 1$, to $t(j) = 0$,

(2) jeśli $b = b', r = r'$, $d(a, a') + q' < q$ oraz $t(i) = 1$, to $t(j) = 1$,

(3) jeśli $a = a', q = q'$, $d(b, b') + r < r'$ oraz $t(i) = 1$, to $t(j) = 1$.

Ta definicja działa bez problemu dla $\hat{A} = \mathbb{R}$ czy $\hat{A} = [0, 1]$, gdzie d ma wartości wymierne. W przypadku ogólnym definicja jest Π^0_1, więc żeby zagwarantować istnienie T, trzeba ograniczyć kwantyfikatory w $<$ na liczbach rzeczywistych przez $\mathrm{lh}(t)$, ale końcowy efekt będzie ten sam.

Łatwo sprawdzamy, że T jest nieskończonym drzewem binarnym, a jeśli $\widetilde{\Phi}$ jest dowolną ścieżką w T, to $\Phi \subseteq \widetilde{\Phi}$ i $\widetilde{\Phi}$ spełnia (1)-(3) z definicji kodu funkcji ciągłej. Skoro Φ była określona na całym $\hat{A}$, to $\widetilde{\Phi}$ spełnia warunki zadania.