

Zadania z AM I.2 na ćwiczenia 5 i 9 VI 2020

1. Niech $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ niemalejąca (niekoniecznie różniczkowalna ani nawet ciągła). Pokaż, że

$$3 \int_0^1 f(x)\sqrt{x} dx \geq 2 \int_0^1 f.$$

2. Zbadaj zbieżność w zależności od $\alpha \in \mathbb{R}$: $\int_0^1 (\operatorname{tg} x - \sin x)^\alpha dx$.

3. Zbadaj zbieżność w zależności od $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^1 x^\alpha \sin x dx, \int_1^{+\infty} x^\alpha \sin x dx.$$

[Pytanie uzupełniające: co z bezwzględną zbieżnością $\int_1^{+\infty} x^\alpha \sin x dx$?

4. Zbadaj zbieżność $\int_1^{+\infty} \sin(x^2) dx$ i ewentualnie $\int_1^{+\infty} x^\alpha \sin(x^2) dx$ w zależności od $\alpha \in \mathbb{R}$.

5. Oblicz wartość: $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$.

6. Zbadaj zbieżność w zależności od $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha} dx, \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha} dx.$$

Oblicz wartość $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^2} dx$.

7. Uzasadnij zbieżność, oblicz wartość:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{1+x^2} dx.$$

8. Zbadaj zbieżność:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{\sin x} \sin(2x)}{\sqrt{x}} dx.$$

9. Zbadaj zbieżność:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x} + \sin x} dx.$$

10. Oblicz wartość:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \sin x} dx.$$

11. Znajdź granicę lub udowodnij, że nie istnieje:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1 + n^2 x^2}.$$

12. Niech $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną i taką, że zarówno f , jak i f' przyjmują wyłącznie wartości dodatnie, a ponadto f' jest nierosnąca. Pokaż, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} f'(n) \text{ zbieżny wtw } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f'(n)}{f(n)} \text{ zbieżny.}$$

13. Pokaż, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!e^n}$ jest rozbieżny.

14. Znajdź $\lim_{x \rightarrow 0^+} x\Gamma(x)$.