Zadania z AM I.2 do rozwiązania pisemnego na 22 V 2020

1. Znajdź zbiór punktów zbieżności szeregu funkcyjnego

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} x^{3n+1}.$$

2. Rozwiń funkcję

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$$

w szereg Maclaurina. Znajdź zbiór punktów zbieżności tego szeregu.

3. Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie klasy $C^\infty(\mathbb{R})$ i niech dla każdego $n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant e^{nx}.$$

Niech $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ będzie szeregiem Maclaurina dla f. Udowodnij, że $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

4. Oblicz całki nieoznaczone:

(a) $\displaystyle\int (e^{x+e^x} - e^{x-e^x})\,\mathrm{d}x,$

(b) $\displaystyle\int xe^x \sin x \cos x\,\mathrm{d}x,$

(c) $\displaystyle\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}\,\mathrm{d}x.$