Zadania z AM I.2 do rozwiązania pisemnego na 6 IV 2018

1. Udowodnij, że dla dowolnych $x, y, z > 0$ zachodzi

$$x \ln x + y \ln y + z \ln z + (2x + 2y + z) \ln 2 \geqslant (x + y + z) \ln(x + y + z).$$

2. Rozstrzygnij, czy funkcja f zadana wzorem

(a) $f(x) = \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} + x \sin(\sqrt{x})$,

(b) $g(x) = \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} \sin(\sqrt{x})$.

jest jednostajnie ciągła na $(0, +\infty)$.

3. Dla jakich $a, b, c \in \mathbb{R}$ funkcja:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{jeśli } x \leqslant 0 \\ \frac{\sin x}{e^{cx} - 1} & \text{jeśli } x > 0 \end{cases}$$

jest ciągła i różniczkowalna na całym $\mathbb{R}$?

4. Wyznacz liczbę rozwiązań równania

$$x \ln |x| + ax + 1 = 0$$

w zależności od parametru $a \in \mathbb{R}$.

5. Zbadaj zmienność (tj.: znajdź maksymalną dziedzinę określoności, granice w krańcach przedziałów określoności, asymptoty, przedziały monotoniczności, ekstrema lokalne, granice pochodnej w punktach nieróżniczkowalności, przedziały wypukłości/wklęsłości, punkty przegięcia – i naszkicuj wykres, ew. opisz wykres ☺) funkcji:

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}.$$

Wyznacz kres górny i dolny zbioru $\{f(x) : x \in (\frac{4}{5}, 4) \cap \mathrm{D}_f\}$.

[Punkt x jest punktem przegięcia f, jeśli f jest ciągła w x, a ponadto istnieje $\epsilon > 0$ t. że f jest ściśle wypukła na $(x - \epsilon, x]$ i ściśle wklęsła na $[x, x + \epsilon)$ bądź na odwrót. W sprawie definicji asymptoty można się po prostu oprzeć na polskiej wikipedii. Proszę pamiętać o asymptotach ukośnych.]