Proponowane Rozwiązania

Zadanie 1. *Udowodnij, że dla* $x, y, z > 0$ *zachodzi:*

$$x\ln(x) + y\ln(y) + z\ln(z) + (2x + 2y + z)\ln(2) \geq (x + y + z)\ln(x + y + z)$$

Rozwiązanie: Zaczniemy od pokazania, że funkcja $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dana wzorem $f(x) = x\ln(x)$ jest wypukła. Istotnie jest to funkcja dwukrotnie różniczkowalna, więc wystarczy aby f'' była dodatnia. Mamy $f'(x) = \ln(x) + 1$, skąd $f''(x) = \frac{1}{x}$, czyli jest to funkcja wypukła.
Przekształćmy lewą stronę:

$$x\ln(x) + y\ln(y) + z\ln(z) + (2x + 2y + z)\ln(2) = x\ln(4x) + y\ln(4y) + z\ln(2z)$$

Teraz jest ona postaci $\frac{1}{4}f(4x) + \frac{1}{4}f(4y) + \frac{1}{2}f(2z)$, a że wagi sumują się do jedynki, to możemy stosować nierówność Jensena otrzymując tezę:

$$\frac{1}{4}f(4x) + \frac{1}{4}f(4y) + \frac{1}{2}f(2z) \geq f(\frac{1}{4}(4x) + \frac{1}{4}(4y) + \frac{1}{2}(2z)) = f(x + y + z)$$

Zadanie 2. *Rozstrzygnij, czy funkcje* $f, g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ *są jednostajnie ciągłe, gdzie:*
(a) $f(x) = \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} + x\sin(\sqrt{x})$
(b) $g(x) = \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}\sin(\sqrt{x})$

Rozwiązanie: a) Zdefiniujmy dwa ciągi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gdzie dla $n \in \mathbb{N}$ mamy $x_n = (2\pi n)^2, y_n = (2\pi n + \frac{1}{n\sqrt{n}})^2$. Zauważmy, że $|y_n - x_n| = \frac{1}{n^3} + \frac{4\pi}{\sqrt{n}}$ co dąży do 0 wraz z $n \to \infty$. Natomiast $|f(y_n) - f(x_n)| = |\frac{\sin(y_n)}{\sqrt{y_n}} - \frac{\sin(x_n)}{\sqrt{x_n}} + y_n\sin(\sqrt{y_n})|$. Pierwsze dwa składniki sumy pod modułem oczywiście wraz z $n \to \infty$ zbiegają do 0, pozostaje więc zbadać zachowanie ostatniego wyrazu $y_n\sin(\sqrt{y_n}) = (2\pi n + \frac{1}{n\sqrt{n}})^2\sin(2\pi n + \frac{1}{n\sqrt{n}}) = 4\pi^2n^2\sin(\frac{1}{n\sqrt{n}}) + (\frac{1}{n^3} + \frac{4\pi}{\sqrt{n}})\sin(\frac{1}{n\sqrt{n}})$. Zauważmy, że wraz z $n \to \infty$ drugi składnik zbiega do 0, natomiast pierwszy składnik rozbiega do $+\infty$, czyli funkcja f nie jest jednostajnie ciągła na $(0, \infty)$.
b) Pokażemy, że w tym wypadku funkcja f będzie jednostajnie ciągła. Zauważmy, że granica prawostronna w zerze istnieje i wynosi 1 (łatwe sprawdzenie). Oznacza to, że naszą funkcję można przedłużyć do funkcji ciągłej $\bar{f} : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, danej wzorem:

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ f(x) & x > 0 \end{cases}$$

Funkcja $\bar{f}$ jako funkcja ciągła, będzie jednostajnie ciągła na każdym przedziale postaci $[0, M]$ dla $M > 0$ (Twierdzenie Cantora). Zatem funkcja f, jako obcięcie funkcji jednostajnie ciągłej, również będzie jednostajnie ciągła na każdym $(0, M]$ dla $M > 0$. Gdybyśmy wykazali, że dla dostatecznie dużych K, funkcja f jest jednostajnie ciągła na $[K, \infty)$ to byłby to koniec zadania (Istotnie, wzielibyśmy wtedy np. $M = K$ otrzymując jednostajną ciągłość na $(0, K]$ oraz $[K, \infty)$ co implikuje jednostajną ciągłość na $(0, \infty)$). Przejdźmy zatem do pokazania tego drugiego: Licząc pochodną funkcji g, mamy: $g'(x) = \frac{\cos(\sqrt{x})}{2x} - \frac{\sin(\sqrt{x})}{2x\sqrt{x}} + \frac{\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} + \frac{\cos(\sqrt{x})}{2}$, zatem z nierówności trójkąta, dla $x \geq K$ dostajemy $|g'(x)| \leq \frac{1}{2K} + \frac{1}{2K\sqrt{K}} + \frac{1}{2\sqrt{K}} + \frac{1}{2}$. Widzimy więc, że np. dla $K = 1$, moduł pochodnej jest ograniczony przez 2, co oznacza, że nasza funkcja jest Lipschitzowska na przedziale $[1, \infty)$, w szczególności więc jest też tam jednostajnie ciągła. W połączeniu z poprzednimi rozważaniami daje to jednostajną ciągłość na całym $\mathbb{R}_+$.

Zadanie 3. *Dla jakich $a, b, c \in \mathbb{R}$ funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła i różniczkowalna, gdzie:*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & x \leq 0 \\ \frac{\sin(x)}{e^{cx}-1} & x > 0 \end{cases}$$

Rozwiązanie: Zauważmy, że funkcja jest dobrze określona dla $a, b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Co więcej, dla $x < 0$ funkcja $f(x) = x^2 + ax + b$ jest funkcją zarówno ciągłą jak i różniczkowalną. Podobnie dla $x > 0$ funkcja $f(x) = \frac{\sin(x)}{e^{cx}-1}$ jest funkcją ciągłą i różniczkowalną. Oznacza to, że jedyne czym musimy się zająć, to sprawdzenie dla jakich $a, b, c \in \mathbb{R}$ w punkcie $x = 0$ funkcja f jest różniczkowalna, co sprowadza się do równości granicy lewo jak i prawostronnej ilorazu różnicowego (oraz, żeby owe granice były skończone). Zaczniemy jednak od sprawdzenia warunku koniecznego - ciągłości - który pozwoli nam zmniejszyć liczbę parametrów. Mamy:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = b = f(0)$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(x)}{e^{cx} - 1} \frac{cx}{x} \cdot \frac{1}{c} = \frac{1}{c}$$

Zatem widzimy, że konieczne jest $b = \frac{1}{c}$. Od tej więc chwili rozpatrujemy dla $x \leq 0$ wzór $x^2 + ax + \frac{1}{c}$. Możemy iść dalej:

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{h^2 + ah}{h} = a$$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\frac{\sin(h)}{e^{ch}-1} - \frac{1}{c}}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{c\sin(h) - e^{ch} + 1}{(e^{ch} - 1)ch}$$

Zauważmy, że $\sin(h) = h + o(h^2)$, $e^{ch} = 1 + ch + \frac{(ch)^2}{2} + o(h^2)$, skąd:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{ch + o(h^2) - 1 - ch - \frac{(ch)^2}{2} + 1 + o(h^2)}{(1 + ch + \frac{(ch)^2}{2} + o(h^2) - 1)ch} = \lim_{h \to 0^+} -\frac{1}{2} \frac{(ch)^2 + o(h^2)}{(ch)^2 + o(h^2)} = -\frac{1}{2}$$

Stąd wnosimy, że f jest ciągła i różniczkowalna na $\mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(a, b, c) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{c}, c)$, gdzie $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Zadanie 4. *Wyznacz liczbę rozwiązań równania (dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, a \in \mathbb{R}$)*

$$x \ln |x| + ax + 1 = 0$$

Rozwiązanie: Ów równanie możemy przepisać w postaci:

$$a = -\frac{x \ln |x| + 1}{x}$$

Będziemy rozpatrywać osobno dwa przypadki:

1) $x > 0$. Wówczas mamy równanie $a = -\frac{x \ln(x)+1}{x}$. Zdefiniujmy $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ wzorem $f(x) = -\frac{x \ln(x)+1}{x} = -\ln(x) - \frac{1}{x}$ i zbadajmy jej przebieg zmienności. Zachodzi: $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$. Co więcej, licząc pochodną (funkcja jest różniczkowalna) mamy $f'(x) = -(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}) = -\frac{x-1}{x^2}$, co jest funkcją dodatnią dla $x < 1$ a ujemną dla $x > 1$, jednocześnie zerującą się w punkcie $x = 1$. Oznacza to, że nasza funkcja f osiąga maksimum w punkcie $x = 1$, na przedziale $x \in (0, 1)$ jest ściśle rosnąca, a na przedziale $x \in (1, \infty)$ ściśle malejąca. Co więcej, $f(1) = -\frac{0+1}{1} = -1$ oraz granice w krańcach dziedziny wynoszą $-\infty$. W związku z czym: funkcja f rosnąc na przedziale $(0, 1)$ przyjmuje (granica w 0^+ i ciągłość - w szczególności własność Darboux) każdą wartość z przedziału $(-\infty, -1)$ dokładnie jeden raz. W punkcie $x = 1$ przyjmuje, jak już zauważyliśmy, wartość -1, natomiast następnie maleje, przyjmując, drugi raz (z podobnym wytłumaczeniem - granica w $+\infty$ oraz ciągłość), każdą wartość z przedziału $(-\infty, -1)$ dokładnie jeden raz. Widzimy więc, że kluczowa jest zależność a oraz $f(1) = -1$, czyli naszego maksimum lokalnego. Po powyższej analizie dostajemy:

- 2 rozwiązania gdy $a < -1$
- 1 rozwiązanie gdy $a = -1$
- 0 rozwiązań gdy $a > -1$

2) $x < 0$. Wówczas mamy równanie $a = -\frac{x \ln(-x)+1}{x}$. Definiujemy $g : \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}$ wzorem $g(x) = -\frac{x \ln(-x)+1}{x} = -\ln(-x) - \frac{1}{x}$. Postępujemy zupełnie analogicznie. Granice: $\lim_{x \to 0^-} g(x) = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$. Patrząc na pochodną, widzimy, że $g'(x) = -(\frac{-1}{-x} - \frac{1}{x^2}) = -\frac{x-1}{x^2}$, co jest funkcją stale dodatnią dla $x < 0$, czyli funkcja g jest ściśle rosnąca. Biorąc pod uwagę granice w krańcach dziedziny oraz powyższy fakt o monotoniczności (+ własność Darboux), wnioskujemy, że g na przedziale $(-\infty, 0)$ przyjmie każdą wartość z przedziału $(-\infty, \infty)$ dokładnie jeden raz. Oznacza to, że dla $x < 0$ mamy:

- 1 rozwiązanie dla $a \in \mathbb{R}$

Teraz należy zsumować rozwiązania po obu przypadkach, dostając, że dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ równanie

$$x \ln |x| + ax + 1 = 0$$

ma dokładnie:

- 3 rozwiązania gdy $a < -1$
- 2 rozwiązania gdy $a = -1$
- 1 rozwiązanie gdy $a > -1$

Zadanie 5. *Zbadać przebieg zmienności funkcji $f : D_f \to \mathbb{R}$ danej wzorem*

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$$

oraz wyznaczyć kresy zbioru $\{f(x) : x \in (\frac{4}{5}, 4) \cap D_f\}$ wyznaczając również D_f–maksymalną dziedzinę określoności.

Rozwiązanie: Będziemy po kolei wyznaczać interesujące nas rzeczy:

Maksymalna dziedzina określoności:

Widzimy, że wzór funkcji f jest dobrze określony dla wszystkich $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, przyjjmiemy więc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Granice i asymptoty

Liczymy granice w krańcach przedziałów określoności:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \{\frac{1}{0^+}\} = +\infty, \lim_{x \to 1^+} f(x) = \{\frac{1}{0^+}\} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x \frac{1}{(1 - \frac{1}{x})^2} = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x \frac{1}{(1 - \frac{1}{x})^2} = +\infty$$

Stąd również widzimy, że asymptotą pionową jest prosta $x = 1$, natomiast nie mamy asymptoty poziomej. Sprawdzamy czy istnieje asymptota ukośna:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{(1 - \frac{1}{x})^2} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{(1 - \frac{1}{x})^2} = 1$$

Domniemane współczynniki kierunkowe mamy, teraz szukamy przesunięcia:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) - x = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 - x^3 + 2x^2 - x}{(x-1)^2} = 2$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - x^3 + 2x^2 - x}{(x-1)^2} = 2$$

Zatem w obu przypadkach wyszła nam prosta $y = x + 2$, która jest asymptotą ukośną (Można było też zauważyć, że $f(x) = \frac{x^3-2x^2+x}{(x-1)^2} + \frac{2x^2-x}{(x-1)^2} = x + \frac{2(x^2-2x+1)}{(x-1)^2} + \frac{3x-2}{(x-1)^2} = x + 2 + \frac{3x-2}{(x-1)^2}$)

Pochodna, ekstrema i przedziały monotoniczności

Policzmy pochodną, która jest również określona na D_f.

$$f'(x) = \frac{3x^2(x-1)^2 - 2(x-1)x^3}{(x-1)^4} = \frac{3x^3 - 3x^2 - 2x^3}{(x-1)^3} = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$$

Zera pochodnej występują w punktach $x \in \{0, 3\}$. Zauważmy, że dla $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (3, \infty)$ mamy $f'(x) > 0$, natomiast dla $x \in (1, 3)$ mamy $f'(x) < 0$. Oznacza to, że funkcja f jest ściśle rosnąca na każdym z przedziałów $(-\infty, 1)$ oraz $(3, \infty)$, a ściśle malejąca na przedziale $(1, 3)$. Co więcej, ekstremum (minimum) lokalne występuje w punkcie $x = 3$. Wartość w tym punkcie wynosi $f(3) = \frac{27}{4}$. Zauważmy też, że granice pochodnej w krańcach wynoszą odpowiednio:

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x) = 1 \qquad \lim_{x\to+\infty} f'(x) = 1$$

$$\lim_{x\to1^-} f'(x) = \{\frac{-2}{0^-}\} = +\infty \qquad \lim_{x\to1^+} f'(x) = \{\frac{-2}{0^+}\} = -\infty$$

Druga pochodna, przedziały wypukłości i punkty przegięcia

Druga pochodna również jako dziedzinę ma zbiór D_f.

$$f''(x) = \frac{(x-1)^3(2x(x-3) + x^2) - 3(x-1)^2x^2(x-3)}{(x-1)^6} =$$

$$= \frac{(x-1)(3x^2 - 6x) - 3x^3 + 9x^2}{(x-1)^4} = \frac{6x}{(x-1)^4}$$

Skoro druga pochodna istnieje, to łatwiej sprawdzić nam przedziały wypukłości: Dla $x < 0$ mamy $f''(x) < 0$, natomiast dla $x \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ mamy $f''(x) > 0$. Oznacza to, że f jest ściśle wklęsła na $(-\infty, 0)$ a ściśle wypukła na każdym z przedziałów $(0, 1)$ i $(1, \infty)$, czyli punktem przegięcia jest punkt $x = 0$.

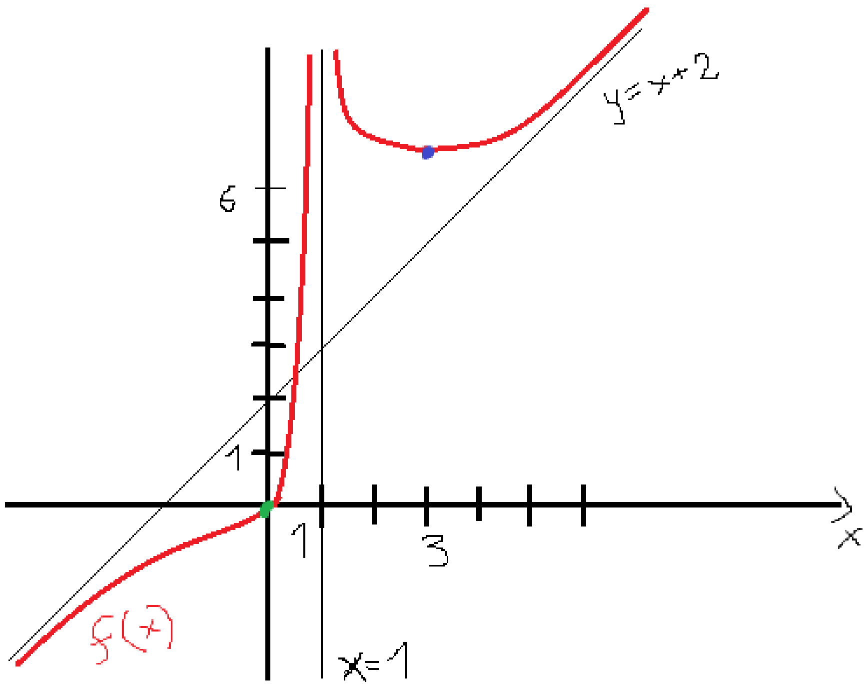
Kresy

Dotychczasowa analiza pozwala stwierdzić, że $\sup\{f(x) : x \in (\frac{4}{5}, 4) \cap D_f\} = +\infty$ (ponieważ np. granica przy $x \to 1^+$ wynosi $+\infty$). Co do kresu dolnego, to z uwagi na monotoniczność na tym przedziale (czyli f rosnąca na

$(\frac{4}{5}, 1) \cup (3, 4)$, a malejąca na $(1, 3))$ dostarcza nam tylko dwóch potencjalnych kandydatów. Minimum - punkt $x = 3$ oraz początek przedziału - punkt $x = \frac{4}{5}$. Już wiemy (wyżej), że $f(3) = \frac{27}{4}$, natomiast $f(\frac{4}{5}) = \frac{64}{125} \cdot \frac{25}{1} = \frac{64}{5}$, czyli $f(3) < f(\frac{4}{5})$, a stąd $\inf\{f(x) : x \in (\frac{4}{5}, 4) \cap D_f\} = \frac{27}{4}$

Wykres

Używając zaawansowanych metod grafiki komputerowej (paint) udało mi się narysować przybliżony wykres funkcji f.



Wykres: Kolor czarny oznacza osie (pogrubiony) oraz asymptoty (cienkie). Kolorem czerwonym oznaczony został wykres. Kolor niebieski odpowiada ekstremum (minimum) lokalnemu, które w naszym wypadku jest jedyne, natomiast kolor zielony to punkt przegięcia - punkt, w którym funkcja zmienia zachowanie z wklęsłej na wypukłą.