Egzamin z logiki matematycznej
6 lutego 2018

Zadanie 1. Formułę rachunku zdań $\psi(p_1, \ldots, p_n)$ nazwiemy monotoniczną, jeśli dla dowolnych wartościowań $v, w \colon \{p_1, \ldots, p_n\} \to \{0, 1\}$, jeśli $v \models \psi$ i $w(p_i) \geqslant v(p_i)$ dla wszystkich $i = 1, \ldots, n$, to $w \models \psi$.

Niech ψ będzie formułą monotoniczną taką, że ani ψ, ani $\neg\psi$ nie są tautologiami. Udowodnij, że ψ jest logicznie równoważna pewnej formule w postaci DNF, w której żadna zmienna nie jest zanegowana.

Zadanie 2. Niech ψ będzie zdaniem

$$\forall x \,\neg(\exists y \,\forall z \,\neg P(x, y, z) \vee \forall y \,\exists z \,(\neg Q(x, y) \vee R(y, z))).$$

a) Znajdź zdanie w preneksowej postaci normalnej logicznie równoważne zdaniu ψ.
b) Rozstrzygnij, czy istnieje zdanie postaci $\forall\exists\forall$ logicznie równoważne zdaniu ψ.

Zadanie 3. Niech $\mathbb{A} = (A, \leqslant^{\mathbb{A}})$ będzie nieskończonym porządkiem liniowym bez największego elementu, niech $\mathcal{U}$ będzie niegłównym ultrafiltrem na $\mathbb{N}$ i niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem elementów ultrapotęgi $\mathbb{A}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$ (każde a_n jest więc klasą abstrakcji pewnego ciągu $(a_{n,i})_{i\in\mathbb{N}}$ elementów A).

Udowodnij, że w $\mathbb{A}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$ istnieje element b taki, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$\mathbb{A}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U} \models b \geqslant a_n.$$

Zadanie 4. Niech T_1 i T_2 będą dwoma niesprzecznymi zbiorami zdań danej sygnatury. Udowodnij, że następujące warunki są równoważne:

a) istnieje zdanie α takie, że

$$T_1 \models \alpha \quad \text{i} \quad T_2 \models \neg\alpha,$$

b) dla każdej pary struktur $\mathbb{A}_1 \models T_1$ i $\mathbb{A}_2 \models T_2$ istnieje zdanie β takie, że

$$\mathbb{A}_1 \models \beta \quad \text{i} \quad \mathbb{A}_2 \models \neg\beta.$$

Zadanie 5. Niech σ będzie sygnaturą złożoną z dwuargumentowego symbolu relacyjnego i kontinuum wielu jednoargumentowych symboli funkcyjnych. Wykaż, że każde właściwe rozszerzenie elementarne struktury $(\mathbb{N}, <, (f)_{f\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}})$ ma nieprzeliczalne uniwersum.

Wskazówka. Można skorzystać z tego, że istnieje nieprzeliczalna rodzina $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ taka, że jeśli $f, g \in \mathcal{F}$ i $f \neq g$, to

$$\exists m \in \mathbb{N} \,\forall n \in \mathbb{N} \,(n > m \Rightarrow f(n) \neq g(n)).$$

Zadanie 6. Niech T będzie teorią aksjomatyzującą klasę struktur $\mathbb{A} = (A, \equiv^{\mathbb{A}})$ takich, że zbiór A jest nieskończony, a $\equiv^{\mathbb{A}}$ jest relacją równoważności na $\mathbb{A}$ mającą dokładnie dwie klasy abstrakcji.

a) Udowodnij, że teoria T nie ma eliminacji kwantyfikatorów.
b) Rozstrzygnij, czy istnieje niesprzeczna teoria $T^+ \supseteq T$ tej samej sygnatury mająca eliminację kwantyfikatorów.