Egzamin z logiki matematycznej

7 lutego 2017 r.

Zadanie 1. Niech S będzie zbiorem wszystkich spełnialnych formuł logiki zdań zbudowanych za pomocą zmiennych zdaniowych ze zbioru $\{p_1, \ldots, p_n\}$. Formułę $\alpha \in S$ nazwiemy *atomem*, jeśli dla każdej formuły $\gamma \in S$ z tego, że $\gamma \models \alpha$, wynika, że $\gamma \equiv \alpha$.

a) Udowodnij, że dla każdej formuły $\beta \in S$ istnieje atom α taki, że $\alpha \models \beta$.
b) Niech $\alpha \in S$ będzie atomem i niech γ będzie formułą w postaci DNF (alternatywa koniunkcji literałów, tzn. zmiennych zdaniowych i ich negacji) taką, że $\alpha \equiv \gamma$. Udowodnij, że każda spełnialna koniunkcja literałów w γ składa się z n literałów.

Zadanie 2. Rozstrzygnij, czy następujące zdanie jest tautologią logiki pierwszego rzędu:

$$\forall x \exists y \forall z (R(x, y) \Rightarrow R(x, z)).$$

Zadanie 3. Udowodnij, że klasa struktur przeliczalnych ustalonej skończonej sygnatury:

a) nie jest zamknięta ze względu na elementarną równoważność,
b) nie jest zamknięta ze względu na ultraprodukty.

Zadanie 4. Niech T będzie teorią (tj. zbiorem zdań) w skończonej sygnaturze. Załóżmy, że T ma model, który jest izomorficzny ze swoją właściwą podstrukturą. Udowodnij, że T ma model przeliczalny, który jest izomorficzny ze swoją właściwą podstrukturą.

Zadanie 5. Niech T_0 oznacza teorię relacji równoważności (sformułowaną w sygnaturze z jednym dwuargumentowym symbolem relacyjnym $\sim$). Niech T_1 rozszerza T_0 o zbiór aksjomatów

$$\left\{ \forall y \exists x_1 \ldots \exists x_n [\bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant n} y \sim x_i \wedge \bigwedge_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i \neq x_j] : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

(T_1 jest zatem teorią relacji równoważności, w których każda klasa abstrakcji jest nieskończona.)

a) Udowodnij, że dla każdych dwu struktur $\mathbb{A} = (A, \sim^{\mathbb{A}})$ i $\mathbb{B} = (B, \sim^{\mathbb{B}})$ spełniających T_1, jeśli Duplikator ma strategie zwycięskie w grach Ehrenfeuchta-Fraïsségo $G_n(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, to Duplikator ma też strategię zwycięską w grze $G_\infty(\mathbb{A}, \mathbb{B})$.
b) Udowodnij, że istnieją dwie struktury $\mathbb{A} = (A, \sim^{\mathbb{A}})$ i $\mathbb{B} = (B, \sim^{\mathbb{B}})$ spełniające T_0 i takie, że Duplikator ma strategie zwycięskie w grach $G_n(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, ale Spoiler ma strategię zwycięską w grze $G_\infty(\mathbb{A}, \mathbb{B})$.

Zadanie 6. Zdefiniujmy logikę $\mathrm{FO}(\exists^\infty)$ poprzez dodanie do logiki pierwszego rzędu kwantyfikatora $\exists^\infty$, "istnieje nieskończenie wiele". Do definicji spełniania dodajemy warunek indukcyjny

$$\mathbb{A} \models \exists^\infty x\, \psi\, [v] \quad \text{wtw} \quad \text{istnieje nieskończenie wiele } a \in A \text{ t. że } \mathbb{A} \models \psi\, [v[a/x]].$$

Rozstrzygnij, czy:

a) logika $\mathrm{FO}(\exists^\infty)$ ma własność zwartości: dla każdego zbioru zdań T, jeśli każdy skończony fragment T ma model, to T ma model,

b) $^{(*?)}$ logika $\mathrm{FO}(\exists^\infty)$ ma własność Löwenheima-Skolema: dla każdego zdania ψ, jeśli ψ ma model nieskończony, to ψ ma też model przeliczalny.