Egzamin z Logiki matematycznej

30 stycznia 2014 r.

Zadanie 1. Algebrę Boole'a A nazywamy *bezatomową*, jeśli nie ma atomów (przypomnijmy, że element $a \in A$ jest atomem algebry A, jeśli $0 < a$ oraz nie istnieje $b \in A$ taki, że $0 < b < a$).

Niech F będzie zbiorem wszystkich formuł rachunku zdań, zbudowanych za pomocą zmiennych zdaniowych z nieskończonego zbioru V.

(a) Udowodnij, że algebra Lindenbauma-Tarskiego $B(\emptyset)$ jest bezatomowa.
(b) Udowodnij, że istnieje zbiór $T \subseteq F$ taki, że algebra Lindenbauma-Tarskiego $B(T)$ nie jest bezatomowa.

Zadanie 2. Rozstrzygnij, czy następująca formuła jest tautologią logiki I rzędu oraz znajdź formułę w preneksowej postaci normalnej, która jest jej logicznie równoważna

$$\Big(\forall x \exists z P(x,z) \land \forall x \forall y (\forall z (P(x,z) \Rightarrow P(y,z)) \lor \forall z (P(y,z) \Rightarrow P(x,z))) \Rightarrow \exists y \forall x P(x,y)\Big)$$

(P jest predykatem dwuargumentowym).

Zadanie 3. Udowodnij, że klasa wszystkich struktur $\mathbb{A} = (A, P^{\mathbb{A}})$ (nad sygnaturą składającą się z jednego predykatu jednoargumentowego P), w których zbiór $P^{\mathbb{A}}$ jest skończony:

(a) jest zamknięta na elementarną równoważność,
(b) nie jest zamknięta na ultraprodukty.

Zadanie 4. Udowodnij, że istnieje przeliczalne ciało uporządkowane $\mathbb{K} = \langle K, \leqslant^{\mathbb{K}}, +^{\mathbb{K}}, \cdot^{\mathbb{K}}, 0^{\mathbb{K}}, 1^{\mathbb{K}} \rangle$, elementarnie równoważne ciału $\mathbb{Q}$ liczb wymiernych i jednocześnie takie, że istnieje element $a \in K \setminus \{0^{\mathbb{K}}\}$ o następującej własności: dla każdej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}$

$$0^{\mathbb{K}} < \underline{n}^{\mathbb{K}} \cdot^{\mathbb{K}} a \leqslant^{\mathbb{K}} 1^{\mathbb{K}},$$

gdzie $\underline{n}$ jest termem $1 + \ldots + 1$, w którym 1 występuje n razy (zatem $\underline{n}^{\mathbb{K}} = 1^{\mathbb{K}} +^{\mathbb{K}} \ldots +^{\mathbb{K}} 1^{\mathbb{K}}$ jest sumą n jedynek ciała $\mathbb{K}$).

Zadanie 5. Udowodnij, że w języku z jednym predykatem dwuargumentowym P własność bycia grafem prostym $\mathbb{A} = \langle A, P^{\mathbb{A}} \rangle$ (o zbiorze wierzchołków A i zbiorze krawędzi $E = \{\{v, w\} : \langle v, w \rangle \in P^{\mathbb{A}}\}$), w którym istnieje podzbiór składający się z co najmniej $\frac{|A|}{2}$ wierzchołków, z których żadne dwa nie są połączone krawędzią, nie jest własnością modeli skończonych, wyrażalną w logice I rzędu (tzn., nie istnieje takie zdanie, że skończony graf je spełnia wtedy i tylko wtedy, gdy ma rozpatrywaną własność).

Zadanie 6. Udowodnij, że klasa algebr Boole'a, które są izomorficzne z ciałami postaci $\mathcal{P}(X)$ $(X \neq \emptyset)$, nie jest aksjomatyzowalna.