

Egzamin z Logiki matematycznej

31 stycznia 2013 r.

Zadanie 1. Algebra Boole'a \mathbb{A} jest:

- *zupełna*, jeśli dla każdego $X \subseteq A$ istnieją w \mathbb{A} kresy ΣX oraz ΠX ,
- *atomowa*, jeśli dla każdego niezerowego elementu $b \in A$ istnieje atom a taki, że $a \leq b$.

Udowodnij, że następujące warunki są równoważne:

1. algebra \mathbb{A} jest zupełna i atomowa,
2. algebra \mathbb{A} jest izomorficzna z ciałem $\mathcal{P}(B)$ dla pewnego zbioru B .

Zadanie 2. Rozstrzygnij, czy następująca formuła jest tautologią (P jest symbolem relacyjnym dwuargumentowym):

$$\forall x \forall y \forall z \left(P(x, x) \wedge \left(P(x, z) \Rightarrow (P(x, y) \vee P(y, z)) \right) \right) \Rightarrow \exists x \forall y P(x, y).$$

Zadanie 3. Niech φ będzie następującym zdaniem (R, S są symbolami relacyjnymi dwuargumentowymi):

$$\neg \exists x \forall z \left(\exists y R(x, y) \wedge \forall z \neg S(x, z) \right).$$

Udowodnij, że

- (a) φ jest logicznie równoważne pewnemu zdaniu postaci $\forall \exists$,
- (b) φ nie jest logicznie równoważne żadnemu zdaniu postaci $\exists \forall$.

Zadanie 4. Rozstrzygnij, czy ultrapotęga struktury relacyjnej $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ względem ultrafiltru niegłównego U na \mathbb{N} jest:

- (a) elementarnie równoważna z $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$,
- (b) izomorficzna z $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$.

Zadanie 5. Niech T będzie teorią w skończonej sygnaturze. Załóżmy, że istnieją struktury $\mathbb{A} \models T$, $\mathbb{B} \models T$ takie, że $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$, $\mathbb{A} \not\cong \mathbb{B}$ i A jest nieskończone. Udowodnij, że istnieją $\mathbb{C} \models T$, $\mathbb{D} \models T$ takie, że $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{D}$, $\mathbb{C} \not\cong \mathbb{D}$ oraz zarówno C , jak i D są mocy continuum.

Zadanie 6. Niech \mathcal{K} będzie klasą tych porządków częściowych, w których istnieje nieskończony antyłańcuch (tzn. zbiór złożony z elementów parami nieporównywalnych). Rozstrzygnij, czy klasa \mathcal{K} jest aksjomatyzowalna.