

Podstawy matematyki – ćwiczenia 14

17.01.2011 r.

1. Z badać, czy następujące formuły są tautologiami i czy są spełnialne:

(a) $p \wedge (q \vee r) \rightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$,

(b) $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow \neg q)$,

(c) $\neg p \wedge (p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)$.

2. Niech $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, p^{\mathcal{A}}, q^{\mathcal{A}} \rangle$, gdzie

$$\langle a, b \rangle \in p^{\mathcal{A}} \quad \text{wtw.} \quad a + b \leq 6$$

$$\langle a, b \rangle \in q^{\mathcal{A}} \quad \text{wtw.} \quad b = a + 2.$$

Z badać, czy następujące formuły są spełnione przy wartościowaniu $v(y) = 7, v(z) = 1$ w strukturze \mathcal{A} .

(a) $\forall x p(x, y) \rightarrow \exists q(x, y)$,

(b) $\forall x p(x, y) \rightarrow \forall q(x, y)$,

(c) $\forall x p(x, y) \rightarrow \exists q(x, z)$.

3. Z badać, czy następujące formuły są tautologiami i czy są spełnialne:

(a) $\exists x \exists y \exists z (R(x) \rightarrow Q(z)) \wedge (R(z) \rightarrow Q(y))$,

(b) $\exists y (P \rightarrow Q(y)) \rightarrow (P \rightarrow \exists y Q(y))$,

(c) $(\forall x P(x) \rightarrow \forall y Q(y)) \rightarrow \exists x (P(x) \rightarrow \forall y Q(y))$,

(d) $\forall y (\neg P(y) \rightarrow \forall y P(y))$.

4. Dla każdej z par struktur wskaż formułę prawdziwą w jednej i nieprawdziwą w drugiej.

(a) $\langle P_2, \parallel \rangle, \langle P_2, \perp \rangle$, gdzie P_2 to zbiór wszystkich prostych w \mathbb{R}^2 ;

(b) $\langle P_2, \perp \rangle, \langle P_3, \perp \rangle$, gdzie P_2 to zbiór wszystkich prostych w \mathbb{R}^2 , a P_3 to zbiór wszystkich prostych w \mathbb{R}^3 .