

Podstawy matematyki – ćwiczenia 9

6.12.2010 r.

1. Które z następujących zbiorów są równoliczne?

$$\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}, \mathbb{R} \times \mathbb{Q}, \mathbb{R} - \mathbb{Q}, 2^{\mathbb{N}}, 2^{\mathbb{R}}, P(\mathbb{R} \times \mathbb{Z}), \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^m$$

2. Niech $A_n = \{0, \dots, n\}$. Jakiej mocy jest zbiór $\prod_{n \in \mathbb{N}} A_n$?

3. Pokazać, że

$$r^+ = \bigcup \{r^n \mid n \in \mathbb{N} - \{0\}\}.$$

4. Funkcja $F: \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}$ jest określona tak:

$$F(f, g)(n) = \min(f(n), g(n)).$$

- (a) Czy funkcja F jest na?
(b) Czy funkcja F jest różnowartościowa?
(c) Jakiej mocy jest zbiór wszystkich klas abstrakcji jądra funkcji F ?
(d) Jakiej mocy są klasy abstrakcji tej relacji?
5. Niech $\varphi: P(\mathbb{N}) \rightarrow P(P(\mathbb{N}) \times P(\mathbb{N}))$ będzie funkcją daną wzorem:

$$\varphi(Z) = \{\langle X, Y \rangle \mid Z \subseteq X \cap Y\}.$$

- (a) Czy φ jest różnowartościowa?
(b) Czy φ jest na?
(c) Niech R będzie zbiorem relacji równoważności w $P(\mathbb{N})$, a C będzie zbiorem częściowych relacji równoważności w $P(\mathbb{N})$. Znaleźć $\varphi^{-1}(R)$ i $\varphi^{-1}(C)$.
(d) Ile elementów mają klasy abstrakcji jądra funkcji φ ?
(e) Czy któraś z poniższych równości zachodzi dla dowolnych $Z_1, Z_2 \in P(\mathbb{N})$?
• $\varphi(Z_1 \cap Z_2) = \varphi(Z_1) \cap \varphi(Z_2)$;
• $\varphi(Z_1 \cup Z_2) = \varphi(Z_1) \cup \varphi(Z_2)$.

6. Dana jest następująca relacja równoważności $r \subseteq P(\mathbb{N})^2$

$$PrQ \text{ wtw. } P = Q = \emptyset \\ P, Q \neq \emptyset \text{ i } \min P = \min Q.$$

Jakiej mocy jest zbiór ilorazowy $P(\mathbb{N})/r$?