

Podstawy matematyki – ćwiczenia 5

8.11.2010 r.

1. Podać przykład $f : A \rightarrow B$, $X \subseteq A$, $Y \subseteq B$ takich, że

- (a) $\vec{f}^{-1}(\vec{f}(X)) \neq X$;
- (b) $\vec{f}(\vec{f}^{-1}(Y)) \neq Y$;
- (c) $\vec{f}(C \cap D) \neq \vec{f}(C) \cap \vec{f}(D)$.

2. Niech $f, g : A \rightarrow A$. Czy z tego, że

$$\forall x f(g(x)) = g(f(x))$$

wynika, że f i g są wzajemnie odwrotne?

3. Niech $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ będzie dana wzorem

$$\varphi(\langle n, k \rangle) = n \cdot k.$$

Zbadać, czy φ jest różnowartościowa i czy jest na \mathbb{N} . Znaleźć $\varphi(P \times (\mathbb{N} - P))$, $\varphi^{-1}(\{1\})$, $\varphi^{-1}(\mathbb{N} - P)$, gdzie P to zbiór liczb parzystych.

4. Niech $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem

$$\varphi(\langle n, k \rangle) = n \cdot k.$$

Wyznaczyć $\varphi^{-1}([1, 2])$.

5. Niech $f : P(\mathbb{N}) \times P(\mathbb{N}) \rightarrow P(\mathbb{N})$ będzie dana wzorem

$$f(\langle C, D \rangle) = C \cap D.$$

- (a) Czy f jest różnowartościowa?
- (b) Czy f jest na $P(\mathbb{N})$?
- (c) Znaleźć $\vec{f}(P(B) \times P(B))$ dla $B \subseteq \mathbb{N}$.
- (d) Znaleźć $\vec{f}^{-1}(\{\mathbb{N}\})$.

6. Pokazać, że funkcja $\varphi : P(A \times B) \rightarrow P(A)^B$ dana wzorem

$$\varphi(\Delta)(b) = \{a \in A \mid \langle a, b \rangle \in \Delta\}$$

jest bijekcją.

7. Niech $\alpha : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ będzie bijekcją. Niech $g : P(\mathbb{N}) \rightarrow (\mathbb{N} \rightarrow P(\mathbb{N}))$ będzie dana wzorem

$$g(A)(n) = \{i \in \mathbb{N} \mid \alpha(n, i) \in A\}.$$

Wykazać, że g jest bijekcją.