

**Podstawy matematyki – ćwiczenia 9**

6.12.2010 r.

1. Które z następujących zbiorów są równoliczne?

$$\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}, \mathbb{R} \times \mathbb{Q}, \mathbb{R} - \mathbb{Q}, 2^{\mathbb{N}}, 2^{\mathbb{R}}, P(\mathbb{R} \times \mathbb{Z}), \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^m$$

2. Niech  $A_n = \{0, \dots, n\}$ . Jakiej mocy jest zbiór  $\prod_{n \in \mathbb{N}} A_n$ ?

3. Pokazać, że

$$r^+ = \bigcup \{r^n \mid n \in \mathbb{N} - \{0\}\}.$$

4. Udowodnić, że dla dowolnej relacji  $r \subseteq A \times A$  zachodzi

$$r^+ = r \cdot r^*.$$

5. Funkcja  $F : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}$  jest określona tak:

$$F(f, g)(n) = \min(f(n), g(n)).$$

- (a) Czy funkcja  $F$  jest na?
  - (b) Czy funkcja  $F$  jest różnowartościowa?
  - (c) Jakiej mocy jest zbiór wszystkich klas abstrakcji jądra funkcji  $F$ ?
  - (d) Jakiej mocy są klasy abstrakcji tej relacji?
6. Niech  $\varphi : P(\mathbb{N}) \rightarrow P(P(\mathbb{N}) \times P(\mathbb{N}))$  będzie funkcją daną wzorem:

$$\varphi(Z) = \{\langle X, Y \rangle \mid Z \subseteq X \cap Y\}.$$

- (a) Czy  $\varphi$  jest różnowartościowa?
- (b) Czy  $\varphi$  jest na?
- (c) Niech  $R$  będzie zbiorem relacji równoważności w  $P(\mathbb{N})$ , a  $C$  będzie zbiorem częściowych relacji równoważności w  $P(\mathbb{N})$ . Znaleźć  $\varphi^{-1}(R)$  i  $\varphi^{-1}(C)$ .