Podstawy matematyki – ćwiczenia 6
15.11.2010 r.

1. Czy są relacjami równoważności:
   (a) $r \subseteq \mathbb{R}^2$, $\langle x, y\rangle \in r \Leftrightarrow x^2 \neq y^2$;
   (b) $r \subseteq \mathbb{R}^2$, $\langle x, y\rangle \in r \Leftrightarrow x^2 = y^2$;
   (c) $r \subseteq \mathbb{Z}^2$, $\langle x, y\rangle \in r \Leftrightarrow x \leqslant y$;
   (d) $r \subseteq P(\mathbb{N})^2$, $\langle x, y\rangle \in r \Leftrightarrow x \cap \mathbb{P} = y \cap \mathbb{P}$, $\mathbb{P}$ to zbiór liczb parzystych?
2. Znaleźć klasę abstrakcji
   (b) $[1]_r$;
   (d) $[\{1\}]_r$.
3. Czy istnieje relacja równoważności na $\mathbb{N}$, która ma
   (a) dwie klasy abstrakcji, każda po 37 elementów;
   (b) dwie klasy abstrakcji po 17 elementów, pięć klas po 33 elementy i jedną klasę nieskończoną;
   (c) nieskończenie wiele klas abstrakcji, każda o nieskończonej liczbie elementów;
4. Czy iloczyn dwóch relacji równoważności musi (może) być relacją równoważności?
5. Niech $\mathbb{Z}[x]$ oznacza zbiór wszystkich wielomianów zmiennej x o współczynnikach całkowitych. Niech r będzie taką relacją w zbiorze $\mathbb{Z}[x]$, że $\langle f, g\rangle \in r$ wtedy i tylko wtedy, gdy różnica $f - g$ ma wszystkie współczynniki parzyste.
   (a) Pokazać, że r jest relacją równoważności.
   (b) Opisać klasę abstrakcji wielomianu zerowego.
   (c) Wskazać trzy różne klasy abstrakcji.
   (d) Czy zbiór $\mathbb{Z}[x]_{/r}$ jest skończony?
   (e) Czy zbiór $\{W(x) \in \mathbb{Z}[x] \mid W(0) = 2\}$ jest klasą abstrakcji tej relacji?
6. Niech r_1, r_2 będą relacjami równoważności na A.
   (a) Czy $r_1 \cup r_2$ jest relacją równoważności?
   (b) Czy $r_1 \cap r_2$ jest relacją równoważności?
   (c) Czy $r_1; r_2$ jest relacją równoważności?
7. Niech $r \subseteq P(\mathbb{N}) \times P(\mathbb{N})$ będzie taka, że

   $$\langle X, Y\rangle \in r \text{ wtw. istnieje skończony zbiór } Z \text{ taki, że } X \cup Z = Y \cup Z.$$

   (a) Udowodnić, że R jest relacją równoważności.
   (b) Znaleźć $[\emptyset]_r$.
8. Niech A będzie niepustym zbiorem i niech $f : A \to A$.
   (a) Udowodnić, że jeśli f jest różnowartościowa, to relacja $r \subseteq A \times A$ dana warunkiem

   $$xry \text{ wtw. } \exists n \in \mathbb{N}(f^n(x) = y \vee f^n(y) = x)$$

   jest relacją równoważności.
   (b) Czy prawdziwe jest twiedzenie odwrotne, tj. czy jeśli r jest relacją równoważności to f musi być różnowartościowa?
   (c) Podać przykład takich A i f, że r ma nieskończenie wiele skończonych klas abstrakcji. (Można zrobić rysunek)