Logika dla informatyków – ćwiczenia 7
22.11.2010 r.

1. Udowodnić, że istnieje niestandardowy model arytmetyki.

2. Napisać formułę $\varphi(x)$ nad sygnaturą arytmetyki orzekającą, że x jest silnią pewnej liczby, tzn. że dla wszystkich wartościowań $v : X \to \mathbb{N}$

$$(\mathbb{N}, v) \models \varphi \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } v(x) \text{ jest postaci } n! \text{ dla pewnego } n.$$

3. Hipoteza Collatza (albo inaczej hipoteza 3k+1) orzeka, że następujący prosty program π zatrzymuje się dla każdej wartości początkowej zmiennej k:

```
while k<>1 do
   if k mod 2=0
      then k:=k div 2
      else k:=3*k+1;
```

   Hipoteza ta dotąd nie została ani udowodniona, ani obalona i ma reputację niezmiernie trudnego problemu. Napisać zdanie φ nad sygnaturą arytmetyki orzekające, że hipoteza Collatza jest prawdziwa, tzn.

$$\mathbb{N} \models \varphi \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \pi \text{ zatrzymuje się dla każdej danej wejściowej } k.$$

4. Napisać formułę $\varphi(x, y)$ nad sygnaturą arytmetyki definiującą funkcję $y = \lfloor \log_2 x \rfloor$, tzn. taką, że dla wszystkich wartościowań $v : X \to \mathbb{N}$

$$(\mathbb{N}, v) \models \varphi \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } v(y) = \lfloor \log_2 v(x) \rfloor.$$

5. Udowodnić, że jeśli funkcja $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest definiowalna w języku arytmetyki, to jest też definiowalna funkcja $G : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dana wzorem

$$G(n) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } n = 0 \\ F(G(n-1)), & \text{gdy } n > 0. \end{cases}$$

6. Liczba naturalna n jest doskonała, gdy jest równa sumie wszystkich swoich dzielników różnych od n. Np. $6 = 1 + 2 + 3$ jest doskonała.

   Napisać formułę $\varphi(x)$ nad sygnaturą arytmetyki taką, że dla wszystkich wartościowań $v : X \to \mathbb{N}$

$$(\mathbb{N}, v) \models \varphi \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } v(x) \text{ jest doskonała.}$$