Logika dla informatyków – ćwiczenia 6
15.11.2010 r.

1. Pokazać, że jeśli klasa $\mathcal{A}$ struktur nad sygnaturą Σ jest aksjomatyzowalna pewnym zbiorem zdań logiki pierwszego rzędu oraz jej dopełnienie też jest aksjomatyzowalne, to każda z tych klas jest aksjomatyzowalna jednym zdaniem pierwszego rzędu.

   Wskazówka: Założyć, że pierwsza struktura jest aksjomatyzowalna przez Δ, druga przez Δ' i żaden skończony podzbiór Δ nie jest aksjomatyzacją $\mathcal{A}$. Wtedy $\Delta \cup \Delta'$ spełnia założenia tw. o zwartości.

2. Niech $Spec(\varphi)$ oznacza zbiór mocy wszystkich skończonych modeli formuły φ. Pokazać, że jeśli Δ jest takim zbiorem zdań, że dla każdego $\varphi \in \Delta$ zbiór $Spec(\neg\varphi)$ jest skończony oraz jeśli $\Delta \models \psi$, to także $Spec(\neg\psi)$ jest skończony.

3. Pokazać, że klasa wszystkich relacji równoważności, które mają skończenie wiele klas abstrakcji nie jest aksjomatyzowalna.

4. Niech Σ będzie skończoną sygnaturą. Udowodnić, że dla każdego zbioru zdań Δ nad Σ następujące warunki są równoważne

   - Δ ma wyłącznie skończone modele,
   - Δ ma z dokładnością do izomorfizmu skończenie wiele modeli.

5. Udowodnić, że klasa struktur izomorficznych ze strukturą postaci $\langle P(A), \cup, \cap, \subseteq \rangle$ nie jest aksjomatyzowalna żadnym zbiorem zdań pierwszego rzędu.

6. Udowodnić, że klasa takich struktur $\mathcal{A} = \langle A, E^{\mathcal{A}} \rangle$, gdzie E jest dwuargumentowym symbolem relacyjnym, że $E^{\mathcal{A}}$ jest skończony nie jest aksjomatyzowalna żadnym zbiorem zdań pierwszego rzędu.