Logika dla informatyków – ćwiczenia 4
25.10.2010 r.

Twierdzenie 1. *Każdą skończoną strukturę nad skończoną sygnaturą można w logice pierwszego rzędu zdefiniować z dokładnością do izomorfizmu.*

Dowód. Niech Σ będzie skończoną sygnaturą i niech $\mathcal{A} = \langle A, f_1^{\mathcal{A}}, \ldots, f_n^{\mathcal{A}}, R_1^{\mathcal{A}}, \ldots, R_m^{\mathcal{A}} \rangle$. Pokażemy, że istnieje zdanie φ takie, że

$$\mathcal{A} \cong \mathcal{B} \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \mathcal{B} \models \varphi.$$

Załóżmy, że nośnik $|\mathcal{A}|$ jest mocy k. Zatem istnieje bijekcja $v : \{x_1, \ldots, x_k\} \to |\mathcal{A}|$. Zdefiniujmy zdanie φ w następujący sposób:

$$\varphi = \exists x_1 \ldots \exists x_k \underbrace{(\varphi_= \wedge \bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant m} \varphi_{R_i} \wedge \bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant n} \varphi_{f_i})}_{\psi}, \text{ gdzie}$$

- $\varphi_= = \bigwedge_{i \neq j} x_i \neq x_j \wedge \forall a (\bigvee_{1 \leqslant i \leqslant k} a = x_i)$
- dla ustalonego l-argumentowego symbolu relacyjnego R określamy φ_R w następujący sposób
$$\varphi_R = \bigwedge_{\langle v(x_{i_1}), \ldots, v(x_{i_k}) \rangle \in R^{\mathcal{A}}} R(x_{i_1}, \ldots, x_{i_l}) \wedge \bigwedge_{\langle v(x_{i_1}), \ldots, v(x_{i_l}) \rangle \notin R^{\mathcal{A}}} \neg R(x_{i_1}, \ldots, x_{i_l})$$
- dla ustalonego l-argumentowego symbolu funkcyjnego f określamy φ_f w następujący sposób
$$\varphi_f = \bigwedge_{f^{\mathcal{A}}(v(x_{i_1}), \ldots, v(x_{i_l})) = a} f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}) = v^{-1}(a)$$

Pokażemy, że

$$\mathcal{A} \cong \mathcal{B} \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \mathcal{B} \models \varphi.$$

($\Rightarrow$) Załóżmy, że $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$. Zatem istnieje izomorfizm $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. Pokażemy, że $\mathcal{B} \models \varphi$. Zauważmy, że $w = h \circ v$ jest wartościowaniem w $|\mathcal{B}|$. Udowodnimy, że $\mathcal{B}, w \models \psi$. Formuła ψ jest koniunkcją kilku formuł, zatem należy pokazać, że w strukturze $\mathcal{B}$ przy wartościowaniu w jest spełniona każda z tych formuł.

- Zachodzi $\mathcal{B}, w \models \varphi_=$, bo w jest bijekcją.
- Niech f będzie l-argumentowym symbolem funkcyjnym w Σ. Pokażemy, że $\mathcal{B}, w \models \varphi_f$. Formuła φ_f jest koniunkcją formuł postaci
$$f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_l}) = x_j, \text{ gdzie } f^{\mathcal{A}}(v(x_{i_1}), \ldots, v(x_l)) = v(x_j).$$
Przekształcenie h jest izomorfizmem, więc zachowuje funkcje. Stąd
$$\begin{aligned} w(x_j) = h(v(x_j)) &= h(f^{\mathcal{A}}(v(x_{i_1}), \ldots, v(x_l))) \\ &= f^{\mathcal{B}}(h(v(x_{i_1})), \ldots, h(v(x_l))) = f^{\mathcal{B}}(w(x_{i_1}), \ldots, w(x_l)). \end{aligned}$$
To jednak oznacza, że istotnie $\mathcal{B}, w \models \varphi_f$.

- Niech R będzie l-argumentowym symbolem relacyjnym w Σ. Pokażemy, że $\mathcal{B}, w \models \varphi_R$. Formuła φ_R jest koniunkcją formuł postaci

  $$R(x_{i_1}, \ldots, x_{i_l}), \text{ jeśli } \langle v(x_{i_1}), \ldots, v(x_{i_l}) \rangle \in R^{\mathcal{A}}.$$

  oraz formuł postaci

  $$\neg R(x_{i_1}, \ldots, x_{i_l}), \text{ jeśli } \langle v(x_{i_1}), \ldots, v(x_{i_l}) \rangle \notin R^{\mathcal{A}}.$$

  Ponieważ h jest izomorfizmem, więc zachowuje relacje. Zatem

  $$\langle v(x_{i_1}), \ldots, v(x_{i_l}) \rangle \in R^{\mathcal{A}} \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \langle h(v(x_{i_1})), \ldots, h(v(x_{i_l})) \rangle \in R^{\mathcal{B}}.$$

  Stąd łatwo wynika, że $\mathcal{B}, w \models \varphi_R$.

($\Leftarrow$) Załóżmy, że $\mathcal{B} \models \varphi$. Pokażemy, że $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$. Skoro

$$\mathcal{B} \models \varphi \text{ i } \varphi = \exists x_1 \ldots \exists x_k \psi,$$

to istnieją elementy $b_1, ..., b_k \in |\mathcal{B}|$ takie, że

$$\mathcal{B}, x_1 : b_1, \ldots x_k : b_k \models \psi.$$

Niech $w : \{x_1, \ldots, x_k\} \to |\mathcal{B}|$ będzie taka, że $w(x_j) = b_j$. Określmy $h : |\mathcal{A}| \to |\mathcal{B}|$

$$h(a) = w(v^{-1}(a)).$$

Pokażemy, że h jest izomorfizmem struktur $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$. Sprawdzamy warunki w definicji izomorfizmu.

- Ponieważ $B, w \models \psi$, więc w szczególności $\mathcal{B}, w \models \varphi_=$. Stąd łatwo wywnioskować, że w jest bijekcją. Ponieważ z założenia v jest bijekcją, to złożenie $w \circ v^{-1}$ również.

- Weźmy dowolny l-argumentowy symbol funkcyjny f z sygnatury Σ. Pokażemy, że dla dowolnych $a_1, \ldots, a_l \in |\mathcal{A}|$

  $$h(f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_l)) = f^{\mathcal{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_l)).$$

  Weźmy $a_1, \ldots, a_l \in |\mathcal{A}|$ i niech $f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_l) = a$. Wtedy w formule φ_f istnieje klazula $f(v^{-1}(a_1), \ldots, v^{-1}(a_l)) = v^{-1}(a)$. Jednak $\mathcal{B}$ jest modelem dla φ, a więc także $\mathcal{B}, w \models \varphi_f$. Zatem

  $$f^{\mathcal{B}}(w(v^{-1}(a_1)), \ldots, w(v^{-1}(a_l))) = w(v^{-1}(a)).$$

- Weźmy dowolny l-argumentowy symbol relacyjny R z sygnatury Σ. Pokażemy, że dla dowolnych $a_1, \ldots, a_l \in |\mathcal{A}|$

  $$\langle a_1, \ldots, a_l \rangle \in R^{\mathcal{A}} \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \langle h(a_1), \ldots, h(a_l) \rangle \in R^{\mathcal{B}}.$$

  Weźmy $a_1, \ldots, a_l \in |\mathcal{A}|$ i niech $\langle a_1, \ldots, a_l \rangle \in R^{\mathcal{A}}$. Wtedy w formule φ_R istnieje klazula $R(v^{-1}(a_1), \ldots, v^{-1}(a_l))$. Jednak $\mathcal{B}$ jest modelem dla φ, a więc także dla $\mathcal{B}, w \models \varphi_R$. Zatem $\langle w(v^{-1}(a_1)), \ldots, w(v^{-1}(a_l)) \rangle \in R^{\mathcal{B}}$.

Odwrotnie, załóżmy, że $\langle h(a_1), \ldots, h(a_l) \rangle \in R^{\mathcal{B}}$. W formule φ_R istnieje klauzula dotycząca krotki $\langle w^{-1}(h(a_1)), \ldots, w^{-1}(h(a_l)) \rangle$, bo w φ_R mamy klauzule dla każdej krotki ze zbioru $\{x_1, \ldots, x_k\}^l$. Musi to być klauzula postaci $R(w^{-1}(h(a_1)), \ldots, w^{-1}(h(a_l))$, bo $\mathcal{B}$ jest modelem dla φ_R. Jednak $\mathcal{A}$ także jest modelem φ, zatem

$$\langle v(w^{-1}(h(a_1))), \ldots, v(w^{-1}(h(a_l))) \rangle \in R^{\mathcal{A}}.$$

Zauważmy, że dla każdego $a \in |\mathcal{A}|$ zachodzi $v(w^{-1}(h(a))) = a$, skąd łatwo otrzymać tezę.

$\square$