Podstawy matematyki – ćwiczenia 8
2.12.2009 r.

Ćwiczenia

1. Czy są relacjami równoważności:
   (a) $r \subseteq \mathbb{R}^2$, $\langle x, y\rangle \in r \Leftrightarrow x^2 \neq y^2$;
   (b) $r \subseteq \mathbb{R}^2$, $\langle x, y\rangle \in r \Leftrightarrow x^2 = y^2$;
   (c) $r \subseteq \mathbb{Z}^2$, $\langle x, y\rangle \in r \Leftrightarrow x \leqslant y$;
   (d) $r \subseteq P(\mathbb{N})^2$, $\langle x, y\rangle \in r \Leftrightarrow x \cap \mathbb{P} = y \cap \mathbb{P}$, $\mathbb{P}$ to zbiór liczb parzystych ?

2. Znaleźć klasę abstrakcji
   (b) $[1]_r$;
   (d) $[\{1\}]_r$.

3. Czy istnieje relacja równoważności na $\mathbb{N}$, która ma
   (a) dwie klasy abstrakcji, każda po 37 elementów;
   (b) dwie klasy abstrakcji po 17 elementów, pięć klas po 33 elementy i jedną klasę nieskończoną;
   (c) nieskończenie wiele klas abstrakcji, każda o nieskończonej liczbie elementów;

4. Niech $\mathbb{Z}[x]$ oznacza zbiór wszystkich wielomianów zmiennej x o współczynnikach całkowitych. Niech r będzie taką relacją w zbiorze $\mathbb{Z}[x]$, że $\langle f, g\rangle \in r$ wtedy i tylko wtedy, gdy różnica $f - g$ ma wszystkie współczynniki parzyste.
   (a) Pokazać, że r jest relacją równoważności.
   (b) Opisać klasę abstrakcji wielomianu zerowego.
   (c) Wskazać trzy różne klasy abstrakcji.
   (d) Czy zbiór $\mathbb{Z}[x]_{/r}$ jest skończony?
   (e) Czy zbiór $\{W(x) \in \mathbb{Z}[x] \mid W(0) = 2\}$ jest klasą abstrakcji tej relacji?

5. Niech $r \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ będzie relacją równoważności w zbiorze $\mathbb{N}$ i niech $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to P(\mathbb{N})$ będzie taka, że $f(\langle x, y\rangle) = [x]_r \cap [y]_r$.
   (a) Czy f jest funkcją różnowartościową?
   (b) Czy f jest na $P(\mathbb{N})$?
   (c) Znaleźć $f^{-1}(\{[3]_r\})$.
   (d) Znaleźć $f(\mathbb{N} \times \mathbb{N} - r)$.

Praca domowa

1. Niech s będzie taką relacją w zbiorze $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$, że $\langle f, g\rangle \in s$ wtedy i tylko wtedy, gdy różnica $f - g$ jest zbieżna do zera.
   (a) Pokazać, że s jest relacją równoważności.
   (b) Wskazać trzy różne klasy abstrakcji.

2. Niech $r \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ będzie relacją równoważności w zbiorze $\mathbb{N}$ i niech $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to P(\mathbb{N})$ będzie taka, że $f(\langle x, y \rangle) = [x]_r \cup [y]_r$.

   (a) Czy f jest funkcją różnowartościową?

   (b) Czy f jest na $P(\mathbb{N})$?

   (c) Znaleźć $f^{-1}(\{[3]_r\})$.

   (d) Znaleźć $f(r)$.

3. Niech $\mathcal{R}$ będzie niepustą rodziną relacji równoważności. Pokazać, że $\bigcap \mathcal{R}$ jest relacją równoważności.