

Podstawy matematyki – ćwiczenia 7

25.11.2009 r.

Ćwiczenia

1. Podać przykład $f : A \rightarrow B$, $X \subseteq A$, $Y \subseteq B$ takich, że

- (a) $f^{-1}(f(X)) \neq X$;
- (b) $f(f^{-1}(X)) \neq X$;
- (c) $f(C \cap D) \neq f(C) \cap f(D)$.

2. Niech $f : P(\mathbb{N}) \times P(\mathbb{N}) \rightarrow P(\mathbb{N})$ będzie dana wzorem

$$f(\langle C, D \rangle) = C \cap D.$$

- (a) Czy f jest różnowartościowa?
- (b) Czy f jest na $P(\mathbb{N})$?
- (c) Znaleźć $f(P(B) \times P(B))$ dla $B \subseteq \mathbb{N}$.
- (d) Znaleźć $f^{-1}(\{\mathbb{N}\})$.

3. Pokazać, że funkcja $\varphi : P(A)^B \rightarrow P(A \times B)$ dana wzorem

$$\varphi(f) = \{\langle a, b \rangle \in A \times B \mid a \in f(b)\}$$

jest różnowartościowa i na.

4. Niech $f \in T \rightarrow T$. Udowodnić, że $f \circ f = f$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f|_{Rg(f)} = id_{Rg(f)}$.

Praca domowa

1. Niech $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ będzie taka, że $\varphi(\langle n, k \rangle) = nk$. Zbadać, czy φ jest różnowartościowa i na \mathbb{N} . Znaleźć $\varphi(\mathbb{P} \times \mathbb{N} \setminus \mathbb{P})$, $\varphi^{-1}(\{1\})$, $\varphi^{-1}(\mathbb{N} \setminus \mathbb{P})$, $\varphi^{-1}(\{2^n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\})$, gdzie \mathbb{P} to zbiór liczb parzystych.
2. Niech $f : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow P(\mathbb{N})$ będzie taka, że $f(\varphi) = \varphi(\mathbb{N})$. Czy f jest różnowartościowa i czy jest na $P(\mathbb{N})$? Znaleźć $f^{-1}(B)$, gdzie B oznacza zbiór jednoelementowych podzbiorów \mathbb{N} .
3. Niech $f : A \rightarrow A$ i niech $f^n = f$ dla pewnego $n > 1$. Udowodnić, że $f(Rg(f)) = Rg(f)$.