Podstawy matematyki - ćwiczenia 2
14.10.2009 r.

Ćwiczenia

1. Zapisać poniższe stwierdzenia w postaci zdań rachunku predykatów.
   (a) Jeżeli niektóre koty są tygrysami i żaden tygrys nie jest borsukiem, to wszystkie borsuki mają wąsy.
   (b) Jeżeli każdy rozumny filozof jest cynikiem i tylko kobiety są rozumne, to o ile istnieją rozumni filozofowie, pewne kobiety muszą być cynikami.
2. Sformułować poprawnie zaprzeczenia twierdzeń:
   (a) Liczby m i n są pierwsze.
   (b) Liczby m i n są względnie pierwsze.
3. Dlaczego zapisanie poniższych zdań w formie zdań logiki predykatów sprawia pewne kłopoty?
   (a) Jeżeli istnieje rozumny filozof, to jest on kobietą.
   (b) Warunek $W(x, y)$ zachodzi dla każdego x i dla pewnego y.
4. Jak rozumiesz następujące zdania? Jak je sformułować, aby nie budziły wątpliwości?
   (a) Nie wolno pić i grać w karty.
   (b) Przepis dotyczy osób, które są obywatelami polskimi i stale zamieszkujących w Polsce.
   (c) Jeżeli pozwany nie stawi się lub nie przyśle przedstawiciela, to wyrok będzie wydany zaocznie.
5. Stosując poniższe schematy pokazać, że następujące formuły są tautologiami.
   - $p \to q \leftrightarrow \neg p \vee q$
   - $\neg \forall x A(x) \leftrightarrow \exists x \neg A(x)$
   - $\neg \exists x A(x) \leftrightarrow \forall x \neg A(x)$
   - $\forall x(A(x) \wedge B(x)) \leftrightarrow \forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$
   - $\exists x(A(x) \vee B(x)) \leftrightarrow \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$
   - $\forall x(A \vee B(x)) \leftrightarrow A \wedge \forall x B(x)$, $x \notin FV(A)$
   - $\exists x(A \wedge B(x)) \leftrightarrow A \wedge \exists x B(x)$, $x \notin FV(A)$
   - $A \leftrightarrow \forall x A$, $x \notin FV(A)$
   - $A \leftrightarrow \exists x A$, $x \notin FV(A)$

   (a) $(\exists y p(y) \to \forall z q(z)) \to \forall y \forall z (p(y) \to q(z))$
   (b) $(\forall x \exists y((p(x) \to q(y)) \to r(y))) \to (\forall x p(x) \to \forall y q(y)) \to \exists y r(y)$

Praca domowa

1. Stosując schematy podane w zadaniu 5 pokazać, że następujące formuły są tautologiami.
   (a) $(\forall x \exists y((p(x) \to q(y)) \to r(y))) \to (\forall x p(x) \to \forall y q(y)) \to \exists y r(y)$
   (b) $\exists x(P(x) \to \forall y Q(y)) \to \exists x \forall y (P(x) \to Q(y))$
   (c) $\forall x \exists y (P(x) \to R(x, y)) \to \forall x (P(x) \to \exists y R(x, y))$