Zadania z logiki[1]

Zadania na rozgrzewkę

1. Zaznacz na rysunku zbiory

   (a) $\{\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}^2 : (x+y>2) \vee (x<3)\}$;

   (b) $\{\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}^2 : (x^2-1=0) \wedge (y=x+7)\}$;

   (c) $\{\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}^2 : (x^2+y^2=1) \to (2x=y)\}$;

   (d) $\{\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}^2 : (x>y) \to ((2x \leq y) \to (x^2+y^2=3))\}$;

   (e) $\{\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}^2 : (x<y) \to x < (\frac{x+y}{2})\}$;

   (f) $\{\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}^2 : 1>2\}$;

   (g) $\{\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}^2 : 2\cdot 2=4\}$;

   (h) $\{\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}^2 : (|x|<|y|) \leftrightarrow (-y<x<y)\}$.

2. Zaznacz na rysunku zbiory

   (a) $\{\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}^2 : (x^2+y^2>1) \to [(x^2+y^2 \leq 2) \wedge (\neg(x\cdot y=0) \to |y|=|x|)]\}$;

   (b) $\{\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}^2 : ((x^2+y^2=4) \to (y>-1 \wedge y \neq 1)) \to (x^2+y^2=9)\}$.

3. Zaznacz na rysunku zbiory

   (a) $\{\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}^2 : (x\cdot x<0) \to (x\cdot x>0)\}$;

   (b) $\{\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}^2 : (x>y) \to (y+x>0)\}$.

   (c) $\{\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}^2 : (x\cdot x+y\cdot y>1) \to (y+x>0)\}$;

4. Zaznacz na rysunku zbiory

   (a) $\{x \in \mathbb{R} : \exists y(x^2+y^2 \leq 1)\}$;

   (b) $\{x \in \mathbb{R} : \forall y(x+y^2 \geq 3)\}$;

   (c) $\{x \in \mathbb{R} : \forall x(x^2 \geq 0)\}$;

   (d) $\{\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}^2 : \exists x(y+x^2=3)\}$.

[1] Zadania są zebrane przypadkowo, nie sprawdzone i bez jakiejkolwiek gwarancji poprawności. Korzystać można na własne ryzyko i odpowiedzialność. Część zadań jest pomysłu J. Tyszkiewicza, D. Niwińskiego, J. Tiuryna i innych. Za poprawki dziękuję Panom Michałowi Brzozowskiemu, Michałowi Urbankowi.

5. Zaznacz na rysunku zbiory

   (a) $\{x \in \mathbb{R} : \forall y \exists z (z > 0 \wedge (x-z)^2 + (y - \log z)^2 \leq (z+1)^2)\}$;
   (b) $\{x \in \mathbb{R} : \exists y \exists z (z > 0 \wedge (x-z)^2 + (y - \log z)^2 \leq (z+1)^2)\}$;
   (c) $\{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1 \to \exists z (x^2 + (y-z)^2 \leq \frac{1}{4})\}$;
   (d) $\{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 : \forall z (y^2 + (x-z)^2 \neq 1) \to \exists z ((x-z)^2 + (y-z^2)^2 = 1)\}$;
   (e) $\{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 : \forall x (x + y < 0) \to (y + x < 0)\}$.

6. Zaznacz na rysunku zbiory

   (a) $\{z \in \mathbb{R} : \exists x \forall y (x^2 + z^2 \leq (2^y + 1)^2)\}$;
   (b) $\{z \in \mathbb{R} : \forall y \exists x (x^2 + z^2 \leq (2^y + 1)^2)\}$;
   (c) $\{z \in \mathbb{R} : \exists y \forall x (x^2 + z^2 \leq (2^y + 1)^2)\}$;
   (d) $\{z \in \mathbb{R} : \forall x \exists y (x^2 + z^2 \leq (2^y + 1)^2)\}$.

7. Zaznacz na rysunku zbiory

   (a) $\{z \in \mathbb{R} : \forall x \exists x (x = 1)\}$;
   (b) $\{z \in \mathbb{R} : \exists x \forall x (x = 1)\}$;
   (c) $\{x \in \mathbb{R} : \forall x \exists x (x = 1)\}$.

8. Zaznacz na rysunku zbiory

   (a) $\{z \in \mathbb{R} : \exists x \forall y (y - |x| \leq z \leq y + |x|\}$;
   (b) $\{z \in \mathbb{R} : \forall y \exists x (y - |x| \leq z \leq y + |x|\}$;
   (c) $\{z \in \mathbb{R} : \exists y \forall x (y - |x| \leq z \leq y + |x|\}$;
   (d) $\{z \in \mathbb{R} : \forall x \exists y (y - |x| \leq z \leq y + |x|\}$.

9. Dla jakich $a, b \in P(\mathbb{N})$ zachodzi warunek:

   (a) $a \cap b = \emptyset \to a \cup b = b$?
   (b) $\forall c (a \cap c = c \to (a = c \vee \neg \exists d (d \neq \emptyset \wedge d \subseteq c)))$?

10. Zapisać za pomocą symboli logicznych i kwantyfikatorów:

(a) W języku arytmetyki $(+, \cdot, 0, 1, =)$

   i) *Pewne liczby są parzyste a inne nie są.*
   ii) *Liczba a jest największym wspólnym dzielnikiem liczb b i c, chyba, że jest parzysta.*
   iii) *Żadna liczba parzysta nie jest mniejsza od każdej liczby pierwszej.*
   iv) *Liczba a jest mniejsza lub równa liczbie b.*

v) *Liczba a jest pierwsza.*

vi) *Zbiór liczb pierwszych jest nieskończony.*

vii) *Pewne liczby są kwadratami a inne nie są.*

viii) *Nie każda liczba jest parzysta.*

ix) *Liczby x i y mają te same dzielniki pierwsze.*

x) *Warunkiem koniecznym na to, aby n było nieparzyste, jest aby n było podzielne przez 6.*

xi) *Prawie wszystkie liczby naturalne są parzyste.*

xii) *Liczba a jest resztą z dzielenia liczby b przez c.*

(b) W języku zawierającym jednoargumentowy symbol funkcyjny f oraz symbol nierówności:

i) *Każdy zbiór dwuelementowy ma kres górny, ale nie każdy ma kres dolny.*

ii) *Niektóre ograniczenia górne zbioru $\{a, b\}$ są punktami stałymi funkcji f.*

(c) W języku arytmetyki liczb rzeczywistych $(+, \cdot, 0, 1, \leq)$ rozszerzonym o jednoargumentowy symbol funkcyjny f:

i) *Liczba a jest dodatnia.*

ii) *Funkcja f nie jest ciągła w punkcie a.*

iii) *Uporządkowanie $\leq$ jest gęste.*

iv) *Funkcja f ma co najmniej dwa punkty stałe.*

v) *Liczba a jest kresem górnym zbioru punktów stałych funkcji f.*

(d) W języku teorii mnogości (tylko symbol $\in$ i równość):

i) Zbiór a jest pusty.

ii) Zbiór a jest podzbiorem zbioru b.

iii) Zbiór a jest sumą rodziny b.

iv) Zbiór a jest parą uporządkowaną $\langle b, c\rangle$.

v) Zbiór f jest funkcją.

vi) Funkcja f jest różnowartościowa.

11. Zapisać w języku teorii mnogości aksjomaty ZFC.

12. Jak rozumiesz następujące zdania? Jak je sformułować, żeby nie budziły wątpliwości?

(a) *Nie wolno pić i grać w karty.*

(b) *Nie wolno pluć i łapać.*

(c) *Zabrania się zaśmiecania i zanieczyszczania drogi.*[2]

(d) *Zabrania się zaśmiecania lub zanieczyszczania drogi.*[3]

(e) *Wpisać, gdy osoba ubezpieczona nie posiada numerów identyfikacyjnych NIP lub PESEL.*[4]

(f) *Przepis dotyczy osób, które są obywatelami polskimi i stale zamieszkujących w Polsce.*

(g) *Jeśli pozwany nie stawi się lub nie przyśle przedstawiciela, to wyrok będzie wydany zaocznie.*

(h) *Jeśli nie przyjdziesz lub nie zadzwonisz, to się nie dowiesz.*

(i) *Podaj przykład liczby, która jest pierwiastkiem pewnego równania kwadratowego o współczynnikach całkowitych i takiej, która nie jest.*

(j) *Warunek zachodzi dla każdego x i dla pewnego y.*

13. Artykuł 10 punkt 1. Ustawy o podatku dochodowym od osób fizycznych z dnia 26 lipca 1991, przed nowelizacją w 1994 roku stanowił co następuje:

    Źródłami przychodów są: (...)

    8) sprzedaż, z zastrzeżeniem ust. 2:

    a) nieruchomości lub ich części oraz udziału w nieruchomości,

    b) spółdzielczego własnościowego prawa do lokalu mieszkalnego oraz wynikającego z przydziału społdzielni mieszkaniowych: prawa do domu jednorodzinnego lub prawa do lokalu w małym domu mieszkalnym,

    c) prawa wieczystego użytkowania gruntów,

    d) innych rzeczy

    — jeżeli sprzedaż nie następuje w wykonywaniu działalności gospodarczej lub została dokonana, w przypadku sprzedaży nieruchomości i praw majątkowych określonych pod lit. a)–c), przed upływem pięciu lat, licząc od końca roku kalendarzowego, w którym nastąpiło nabycie lub wybudowanie, a innych rzeczy — przed upływem pół roku, licząc od końca miesiąca, w którym nastapiło nabycie.

    W roku 1994 dokonano zmian w ustawie, zastępując m.in. słowa *„lub została dokonana”* przez *„i została dokonana”*.

    Pan Kowalski kupił w styczniu 1992 roku telewizor, który po siedmiu miesiącach sprzedał z zyskiem. Czy powinien zapłacić podatek? A jak byłoby w roku 1995?

    Rozwiązanie: Pan Kowalski w obu przypadkach nie powinien płacić podatku. W roku 1995 dlatego, że tak wynikało z nowej treści ustawy. A w roku 1992 dlatego, że artykulu 10 p. 1 i tak nie stosowano, bo go żaden urzędnik nie rozumiał.

[2] Kodeks Drogowy przed nowelizacją w roku 1997.

[3] Kodeks Drogowy po nowelizacji w roku 1997.

[4] Instrukcja wypełniania formularza ZUS ZCZA (Zgłoszenie danych o członkach rodziny...)

14. Ustawa z 15 grudnia 2000 r. o spółdzielniach mieszkaniowych opublikowana w Dz. U. Nr 4 (2001) poz. 27, zawiera m.in. taki przepis:

    Art. 39. 1. Na pisemne żądanie członka, któremu przysługuje spółdzielcze własnościowe prawo do lokalu mieszkalnego i spółdzielcze prawo do lokalu użytkowego, w tym spółdzielcze prawo do garażu, spółdzielnia mieszkaniowa jest zobowiązana zawrzeć z tym członkiem umowę przeniesienia własności lokalu (...)

    Mam mieszkanie własnościowe (a raczej „spółdzielcze własnościowe prawo" do tego mieszkania) ale nie mam żadnego lokalu użytkowego ani garażu. Czy mogę się ubiegać o przeniesienie własności lokalu?

    Rozwiązanie: Na szczęście już tak. Błąd poprawiono ustawą z dnia 21 grudnia 2001. Zamiast *„i"* jest teraz przecinek.

15. *Gazeta Wyborcza* opublikowała w grudniu 2002 roku następujące „zadanie z logiki":

    W pismach scholastyków znajdujemy zdanie: „Bóg istnieje, ponieważ istnieje".
    Czy to zdanie jest prawdziwe z punktu widzenia logiki?

    Następnie w Internecie[5] podano jako prawidłową odpowiedź „tak". Jaki błąd popełnił autor zadania i odpowiedzi?

    Rozwiązanie: Konstrukcja *„A, ponieważ B"* nie jest tożsama z implikacją *„Jeśli B to A"*. Konstrukcja ta zawiera explicite stwierdzenie, że A zachodzi, oraz uzasadnienie tego stwierdzenia. Taka myśl jest wyrażalna w języku polskim, ale nie daje się wypowiedzieć w języku zwykłej logiki formalnej, takiej jak np. klasyczny rachunek zdań. Dotyczy to wielu innych podobnych konstrukcji. Język naturalny jest po prostu bogatszy, niż jakikolwiek system formalny.

    Oczywiście można sobie wyobrazić taki rachunek logiczny, w którym konstrukcja *„A, ponieważ B"* byłaby wyrażalna, nie jest jednak jasne jak taki rachunek powinien być zdefiniowany.

16. Czy następujące definicje można lepiej sformułować?

    (a) *Zbiór A jest* dobry*, jeśli ma co najmniej 2 elementy.*
    (b) *Zbiór A jest* dobry*, jeśli dla każdego* $x \in A$*, jeśli* x *jest parzyste, to* x *jest podzielne przez* 3.
    (c) *Zbiór A jest* dobry*, jeśli dla pewnego* $x \in A$*, jeśli* x *jest parzyste, to* x *jest podzielne przez* 3.

17. Wskaż błąd w rozumowaniu:

    (a) *Aby wykazać prawdziwość tezy*
    „Dla dowolnego n, jeśli zachodzi warunek $W(n)$ to zachodzi warunek $U(n)$"
    załóżmy, że dla dowolnego n *zachodzi* $W(n)$...

[5] http://www2.gazeta.pl/liganaukowa/1,38204,1239101.html

(b) *Aby wykazać prawdziwość tezy*
„Dla pewnego n, jeśli zachodzi warunek $W(n)$ to zachodzi warunek $U(n)$"
załóżmy, że dla pewnego n zachodzi $W(n)$...

18. Które z poniższych zdań jest materialną prawdą?

    (a) *Jeśli pada deszcz to noszę parasol.*

    (b) *Jeśli noszę parasol to pada deszcz.*

    (c) *Myślę, więc jestem.*

    (d) *Jestem, więc myślę.*

19. Rozpatrzmy następujący autentyczny dialog:

    — *Nie chcesz zupki?*
    — *Nie!*

    Czy dziecko chciało zupki?

    Rozwiązanie: Tak. Dziecko intuicyjnie zastosowało zasadę podwójnego przeczenia ($\alpha \to \neg\neg\alpha$), zamiast konstrukcji językowej, która polega na wzmocnieniu jednego zaprzeczenia przez następne zaprzeczenie. Por. np. „*nic nie mam*" i angielskie „*I've got nothing*".

20. Czy zdanie

    (a1) *Nie istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych.*

    (b1) *Nie istnieje skończenie wiele liczb pierwszych.*

    jest poprawnym zaprzeczeniem zdania

    (a2) *Istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych*?

    (b2) *Istnieje skończenie wiele liczb pierwszych*?

    Sformułować te zdania poprawnie.

21. Sformułuj poprawnie zaprzeczenia zdań:

    - *Liczby 2 i 5 są pierwsze.*
    - *Liczby 2 i 5 są względnie pierwsze.*

22. Czy zdanie *„Liczba a nie jest kwadratem pewnej liczby całkowitej"* jest poprawnym zaprzeczeniem zdania *„Liczba a jest kwadratem pewnej liczby całkowitej"*? A może innego zdania?

Formuły otwarte

23. Wyznaczyć wartość formuły $x \cdot y = 0 \to x + y = y$:

    (a) w strukturze $\langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$, przy wartościowaniu $v(x) = 1, v(y) = 2$ i przy wartościowaniu $w(x) = 0, w(y) = 3$;

    (b) w strukturze $\langle P(\mathbb{N}), \cup, \cap, \emptyset, \mathbb{N} \rangle$, przy wartościowaniu $v(x) = \{2, 3, 5\}, v(y) = \{4, 6, 8\}$ i przy wartościowaniu $w(x) = \{2, 3\}, w(y) = \{2, 3, 5\}$.

24. Wyznaczyć wartość formuły $P(x) \to (R(x, y) \to \neg P(y))$:

    (a) w strukturze $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, P^{\mathcal{A}}, R^{\mathcal{A}} \rangle$ gdzie $n \in P^{\mathcal{A}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy n jest parzyste, a relacja $\mathcal{R}^{\mathcal{A}}$ to zwykła relacja porządku, przy wartościowaniu $v(x) = 2, v(y) = 2$ i przy wartościowaniu $w(x) = 0, w(y) = 7$.

    (b) w strukturze $\mathcal{B} = \langle \mathbb{N}, P^{\mathcal{B}}, R^{\mathcal{B}} \rangle$ gdzie $P^{\mathcal{B}} = \{2, 7\}$, oraz $R^{\mathcal{A}} = \{\langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 5 \rangle\}$, przy wartościowaniu $v(x) = 2, v(y) = 5$ i przy wartościowaniu $w(x) = 7, w(y) = 3$.

25. Wskazać wartościowanie spełniające formułę $R(f(x)) \to (Q(g(x)) \wedge \neg R(f(g(y))))$ w strukturze $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych, w której

    - $a \in R^{\mathbb{R}}$ wtedy i tylko wtedy gdy a jest liczbą wymierną;
    - $a \in Q^{\mathbb{R}}$ wtedy i tylko wtedy gdy a jest liczbą całkowitą;
    - $f^{\mathcal{R}}(a) = a^2$ i $g^{\mathcal{R}}(a) = |a|$,

    oraz wartościowanie nie spełniające tej formuły.

26. Wskazać strukturę i wartościowanie spełniające formułę

    (a) $R(f(x)) \vee Q(y) \to (R(f(y)) \to x = y)$;

    (b) $(R(x) \to Q(f(x))) \wedge (R(f(x)) \to Q(y))$;

    (c) $(R(x) \to R(y)) \to (Q(f(x)) \to R(f(y)))$,

    oraz strukturę i wartościowanie nie spełniające tej formuły.

27. Dla każdej z par struktur:

    (a) $\langle \mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ i $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$;

    (b) $\langle \mathbb{N}, +, 0 \rangle$ i $\langle \mathbb{N}, \cdot, 1 \rangle$;

    (c) $\langle P_2, \| \rangle$ i $\langle P_2, \perp \rangle$, gdzie P_2 oznacza zbiór wszystkich prostych w $\mathbb{R}^2$;

    (d) $\langle P_2, \perp \rangle$ i $\langle P_3, \perp \rangle$, gdzie P_2 i P_3 to odpowiednio zbiory wszystkich prostych w $\mathbb{R}^2$;

    (e) $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ i $\langle P(\mathbb{N}), \cup, \cap, \emptyset, \mathbb{N} \rangle$;

    (f) $\langle \mathbb{N}, \leq, 0 \rangle$ i $\langle \mathbb{Z}, \leq, 0 \rangle$;

(g) $\langle \mathbb{N}, +, 0\rangle$ i $\langle \{a, b\}^*, \cdot, \varepsilon\rangle$,

wskaż formułę otwartą spełnialną w jednej z nich a w drugiej nie.

28. Pokazać, że nie istnieje formuła otwarta spełnialna w $\langle \mathbb{N}, \leq\rangle$ i niespełnialna w $\langle \mathbb{Z}, \leq\rangle$.

29. Dla dowolnego grafu G skonstruować taką formułę otwartą φ_G, że:

    - Formuła φ_G jest spełnialna wtedy i tylko wtedy gdy graf G jest czterokolorowy (tj. można jego wierzchołki pomalować czterema kolorami tak, aby wierzchołki połączone krawędzią zawsze miały różne kolory).
    - Długość formuły φ_G jest nie większa niż $P(n)$, gdzie P jest pewnym ustalonym wielomianem (niezależnym od G).
    - Konstrukcja formuły φ_G nie wymaga sprawdzania, czy G jest czterokolorowy.

    Sygnatura formuły φ_G powinna zawierać dwuargumentowy symbol relacyjny R i cztery jednoargumentowe symbole relacyjne K_1, K_2, K_3, K_4. Każdemu wierzchołkowi grafu G powinna odpowiadać inna zmienna indywiduowa. Wtedy na przykład formuła $R(x, y) \wedge K_1(x) \wedge K_2(y)$ wyraża taką myśl: wierzchołki x i y są połączone krawędzią, pierwszy z nich ma kolor nr 1, a drugi ma kolor nr 2.

30. Dlaczego zadanie 29 jest trywialne, jeśli pominąć trzeci warunek?

Rachunek zdań

31. (Z Mendelsona) Czy te informacje są niesprzeczne? (Wskazówka: użyć zmiennych zdaniowych jako skrótów i zbadać spełnialność otrzymanego zbioru schematów zdaniowych.)

    Jeśli rośnie kurs obligacji lub spada stopa procentowa, to albo spada kurs akcji albo nie rosną podatki. Kurs akcji spada wtedy i tylko wtedy kiedy rośnie kurs obligacji i rosną podatki. Jeśli spada stopa procentowa to albo kurs akcji nie spada albo kurs obligacji nie rośnie. Albo spada kurs akcji i stopa procentowa albo podatki rosną.

    (Uwaga: „albo" znaczy to samo co „lub".)

32. (Z Mendelsona) Czy to wnioskowanie jest poprawne?

    Jeśli inwestycje pozostaną na stałym poziomie, to wzrosną wydatki państwa lub wzrośnie bezrobocie. Jeśli wydatki państwa nie wzrosną, to obniżone będą podatki. Jeśli podatki będą obniżone i inwestycje pozostaną na stałym poziomie, to bezrobocie się nie zwiększy. A zatem wydatki państwa na pewno wzrosną.

33. Zbadać, czy następujące formuły są tautologiami rachunku zdań i czy są spełnialne:

    (a) $(p \to r) \wedge (q \to s) \wedge (\neg p \vee \neg s) \to (\neg p \vee \neg q)$;

(b) $((p \to q) \lor r) \land (\neg p \to r)$;

(c) $(p \to q) \lor (q \to r) \lor (r \to p)$;

(d) $((p \lor q) \to r) \to (p \to r) \lor (q \to r)$;

(e) $(p \to q) \land (\neg p \to r) \to (r \to \neg q)$;

(f) $((\neg p \to q) \to r) \to \neg(p \to q)$;

(g) $(((p \to q) \to r) \to \neg p) \to \neg q$;

(h) $((p \to q) \to p) \to q$;

(i) $p \lor (\neg p \land q) \lor (\neg p \land \neg q)$;

(j) $(p \to q) \lor (p \to \neg q)$;

(k) $(p \land q \to r) \to (p \land \neg r) \to \neg q$;

(l) $q \lor r \to (p \lor q \to p \lor r)$;

(m) $(p \lor q \lor r) \land (q \lor (\neg p \land s)) \land (\neg s \lor q \lor r) \to q$.

34. Czy następujące zbiory formuł są spełnialne?

(a) $\{p \to \neg q, q \to \neg r, r \to \neg p\}$;

(b) $\{p \to q, q \to r, r \lor s \leftrightarrow \neg q\}$;

(c) $\{\neg(\neg q \lor p), p \lor \neg r, q \to \neg r\}$;

(d) $\{s \to q, p \lor \neg q, \neg(s \land p), s\}$.

35. Czy zachodzą następujące związki?

(a) $p \to q, q \models p$;

(b) $p \land q \to \neg r, p \models r \to \neg q$;

(c) $p \to q, p \to (q \to r) \models p \to r$;

(d) $p \to (q \to r), p \to q \models q \to r$;

(e) $(p \to q) \to r, \neg p \models r$;

(f) $(p \to q) \to r, \neg r \models p$;

(g) $(p \to q) \to r, \neg q \models \neg r$;

(h) $p \to q, r \to \neg q \models r \to \neg p$.

36. Znaleźć formułę zdaniową α, która jest spełniona dokładnie przy wartościowaniach v spełniających warunki:

(a) Dokładnie dwie spośród wartości $v(p)$, $v(q)$ i $v(r)$ są równe 1.

(b) $v(p) = v(q) \neq v(r)$.

Rozwiązanie: Można to robić na różne sposoby, ale najprościej po prostu wypisać alternatywę koniunkcyj, np. $(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)$.

37. Udowodnić, że dla dowolnej funkcji $f : \{0,1\}^k \to \{0,1\}$ istnieje formuła α, w której występują tylko zmienne zdaniowe ze zbioru $\{p_1, \ldots, p_k\}$, o tej własności, że dla dowolnego wartościowania zdaniowego v zachodzi równość $v(\alpha) = f(v(p_1), \ldots, v(p_k))$. (Inaczej mówiąc, formuła α definiuje funkcję zerojedynkową f.)

    Wskazówka: Indukcja ze względu na k.

38. Znaleźć (o ile istnieje) taką formułę zdaniową α, aby następująca formuła była tautologią rachunku zdań:

    (a) $(\neg p \wedge \alpha) \vee (\neg q \wedge \neg\alpha \wedge r) \vee (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q \wedge \neg\alpha)$;

    (b) $(\alpha \to p) \wedge (\neg\alpha \to q) \leftrightarrow (\alpha \wedge p) \vee (\neg\alpha \wedge q)$;

    (c) $((r \to (\neg q \wedge p)) \to \alpha) \to (\alpha \wedge (p \to q) \wedge r)$;

    (d) $(\alpha \to p) \to (p \to q)$;

    (e) $((\alpha \wedge q) \to \neg p) \to ((p \to \neg q) \to \alpha)$;

    Rozwiązanie: Przy każdym możliwym wartościowaniu zmiennych p, q, r nasza formuła jest albo równoważna α albo $\neg\alpha$ albo jest po prostu spełniona lub nie spełniona niezależnie od α. Badamy wszystkie takie wartościowania i ustalamy kiedy α musi być prawdziwa a kiedy fałszywa. Możliwa odpowiedź w punkcie (a): $\neg p$, w punkcie (b): $\neg q$ i w punkcie (c): $(p \to q) \wedge r$. W punkcie (d) rozwiązania nie ma, a w punkcie (e) oczywiście(!) wystarczy za α przyjąć $\top$.

39. Znaleźć (o ile istnieje) taką formułę zdaniową α, aby następująca formuła była tautologią rachunku zdań:

    (a) $p \vee \alpha \to \alpha \wedge p$;

    (b) $(\alpha \to p) \wedge (\neg\alpha \to q)$;

    (c) $((\alpha \wedge q) \to \neg p) \to ((\alpha \to p) \to \neg q)$;

40. Znaleźć (o ile istnieje) taką formułę zdaniową α, aby następujące formuły były jednocześnie tautologiami rachunku zdań:

    (a) $(\alpha \wedge p) \leftrightarrow (p \wedge q)$ oraz $(\alpha \vee p) \leftrightarrow (p \vee r)$;

    (b) $(q \to \alpha) \leftrightarrow (q \to (p \wedge r))$ oraz $(\alpha \to q) \leftrightarrow (\neg(p \vee r) \to q)$;

    (c) $(p \to \alpha) \leftrightarrow (q \to (\neg p \vee r))$ oraz $((r \to q) \to p) \leftrightarrow (\neg p \to \neg\alpha)$.

41. Załóżmy, że zmienna zdaniowa p nie występuje w formułach $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1 \ldots, \beta_m$. Pokazać, że formuła $(\alpha_1 \vee \cdots \vee \alpha_n) \wedge (\beta_1 \vee \cdots \vee \beta_m)$ jest tautologią rachunku zdań wtedy i tylko wtedy, gdy tautologią jest formuła $(p \wedge \alpha_1) \vee \cdots \vee (p \wedge \alpha_n) \vee (\neg p \wedge \beta_1) \vee \cdots \vee (\neg p \wedge \beta_m)$.

42. Załóżmy, że zmienna zdaniowa p nie występuje w formułach $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1 \ldots, \beta_m$. Pokazać, że formuła $(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n) \vee (\beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_m)$ jest spełnialna wtedy i tylko wtedy, gdy spełnialna jest formuła $(p \vee \alpha_1) \wedge \cdots \wedge (p \vee \alpha_n) \wedge (\neg p \vee \beta_1) \wedge \cdots \wedge (\neg p \vee \beta_m)$.

43. Załóżmy, że zmienne zdaniowe $q_1, \ldots, q_{n-3}$ (gdzie $n \geq 4$) nie występują w formułach $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Udowodnić, że formuła $(\alpha_1 \vee \cdots \vee \alpha_n)$ jest spełnialna wtedy i tylko wtedy, gdy spełnialna jest formuła $(\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee q_1) \wedge (\alpha_3 \vee \neg q_1 \vee q_2) \wedge \cdots \wedge (\alpha_{n-2} \vee \neg q_{n-4} \vee q_{n-3}) \wedge (\alpha_{n-1} \vee \alpha_n \vee \neg q_{n-3})$.

44. Udowodnić, że dla dowolnej formuły rachunku zdań istnieje równoważna jej formuła w *koniunkcyjnej postaci normalnej*, tj. w postaci koniunkcji alternatyw zmiennych zdaniowych i negacyj zmiennych zdaniowych. Pokazać, że długość takiej postaci normalnej może rosnąć wykładniczo w stosunku do rozmiaru formuły początkowej.

45. Dla dowolnej formuły φ rachunku zdań, nie sprawdzając czy φ jest spełnialna, skonstruować taką formułę ψ w postaci normalnej, że:

    - Formuła ψ jest spełnialna wtedy i tylko wtedy gdy φ jest spełnialna.
    - Długość formuły ψ jest ograniczona przez $P(|\varphi|)$, gdzie $|\varphi|$ to długość formuły φ, a P to pewien ustalony wielomian (niezależny od φ).

    Wskazówka: Rozwiązać najpierw zadanie 42.

46. Poprawić rozwiązanie poprzedniego zadania tak, żeby formuła ψ była koniunkcją członów postaci $(\alpha \vee \beta \vee \gamma)$, gdzie każda z formuł α, β, γ jest albo zmienną zdaniową albo negacją zmiennej zdaniowej.

    Wskazówka: Rozwiązać najpierw zadanie 43.

47. Podać przykład takiego zbioru Γ formuł rachunku zdań, że zbiór wartościowań spełniających Γ jest mocy 5, przeliczalny, itp.

    Wskazówka: Zbiór wszystkich wartościowań spełniających jakiś zbiór można też scharakteryzować jako zbiór gałęzi pewnego drzewa binarnego.

48. (Translacja Friedmana) Niech α będzie ustaloną formułą rachunku zdań. Dla dowolnej formuły β określamy β^α przez indukcję: $p^\alpha = p \vee \alpha$; $(\beta \to \gamma)^\alpha = \beta^\alpha \to \gamma^\alpha$. Wtedy $\models \beta$ implikuje $\models \beta^\alpha$.

    Wskazówka: zdefiniować wartościowanie $v'(p) = v(p \vee \alpha)$ i pokazać, że $v'(\beta) = v(\beta \vee \alpha)$ zachodzi dla dowolnej formuły β.

49. Dla dowolnego grafu G skonstruować taką formułę rachunku zdań φ_G, że:

    - Formuła φ_G jest spełnialna wtedy i tylko wtedy gdy graf G jest czterokolorowy (tj. można jego wierzchołki pomalować czterema kolorami tak, aby wierzchołki połączone krawędzią zawsze miały różne kolory).

- Długość formuły φ_G jest nie większa niż $P(n)$, gdzie P jest pewnym ustalonym wielomianem (niezależnym od G).
- Konstrukcja formuły φ_G nie wymaga sprawdzania, czy G jest czterokolorowy.

Wskazówka: Rozwiązać najpierw zadanie 29.

50. Niech formuła $\varphi \to \psi$ będzie tautologią rachunku zdań. Znaleźć taką formułę ϑ, że:

    - Zarówno $\varphi \to \vartheta$ jak i $\vartheta \to \psi$ są tautologiami rachunku zdań.
    - W formule ϑ występują tylko takie zmienne zdaniowe, które występują zarówno w φ jak i w ψ.

51. Niech $\sigma(p)$ będzie pewną formułą, w której występuje zmienna zdaniowa p i niech q będzie zmienną zdaniową nie występującą w $\sigma(p)$. Przez $\sigma(q)$ oznaczmy formułę powstałą z $\sigma(p)$ przez zamianę wszystkich p na q. Udowodnić, że jeśli

$$\sigma(p), \sigma(q) \models p \leftrightarrow q$$

to istnieje formuła τ, nie zawierająca zmiennych p ani q, taka że

$$\sigma(p) \models p \leftrightarrow \tau.$$

Formuły rachunku predykatów

52. (Z Mendelsona i nie tylko) Zapisać następujące stwierdzenia w postaci zdań rachunku predykatów (wprowadzając odpowiednie symbole relacyjne, np $P(x, y)$ dla „x jest przodkiem y”).

    (a) *Jeśli każdy przodek przodka dowolnej osoby jest też przodkiem tej osoby, ale nikt nie jest swoim własnym przodkiem, to jest ktoś taki, kto nie ma przodków.*

    (b) *Jeśli każdy rozumny filozof jest cynikiem i tylko kobiety są rozumne, to (o ile istnieją rozumni filozofowie) pewne kobiety muszą być cynikami.*

    (c) *Jeśli niektóre koty są tygrysami i żaden tygrys nie jest borsukiem, to wszystkie borsuki mają wąsy.*

53. Dlaczego zapisanie poniższych stwierdzeń w formie zdań rachunku predykatów sprawia pewne kłopoty?

    (a) *Jeśli istnieje rozumny filozof to jest on kobietą.*

    (b) *Warunek $W(x, y)$ zachodzi dla każdego x i dla pewnego y.*

54. Rozważamy strukturę $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, M^{\mathcal{N}}, D^{\mathcal{N}}, Z^{\mathcal{N}}, J^{\mathcal{N}} \rangle$ gdzie $M^{\mathcal{N}}$ i $D^{\mathcal{N}}$ są relacjami trójargumentowymi, a $Z^{\mathcal{N}}$ i $J^{\mathcal{N}}$ są relacjami jednoargumentowymi. Te relacje są zdefiniowane tak:

$$\langle a, b, c\rangle \in M^{\mathcal{N}}, \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } a \cdot b = c;$$
$$\langle a, b, c\rangle \in D^{\mathcal{N}}, \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } a + b = c;$$
$$a \in Z^{\mathcal{N}}, \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } a = 0;$$
$$a \in J^{\mathcal{N}}, \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } a = 1.$$

Napisać takie formuły pierwszego rzędu, które są spełnione w $\mathcal{N}$ przez wartościowanie $v(x) = a, v(y) = b, v(z) = c$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

(a) Zachodzi równość $a^2 + 2b^2 = c - 3$.

(b) Liczba a jest resztą z dzielenia b przez c.

(c) Liczba a jest potęgą dwójki;

(d) Liczby a i b są względnie pierwsze.

55. W strukturze $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, P^{\mathcal{A}}, Q^{\mathcal{A}} \rangle$, gdzie:

$$\langle a, b\rangle \in P^{\mathcal{A}} \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } a + b \geq 6;$$
$$\langle a, b\rangle \in Q^{\mathcal{A}} \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } b = a + 2,$$

wyznaczyć wartość formuł:

(a) $\forall x P(x, y) \rightarrow \exists x Q(x, y)$;

(b) $\forall x P(x, y) \rightarrow \forall x Q(x, y)$;

(c) $\forall x P(x, y) \rightarrow \exists x Q(x, z)$;

przy wartościowaniach $v(y) = 7$, $v(z) = 1$ oraz $u(y) = 3, u(z) = 2$.

56. Wyznaczyć wartość formuły

(a) $\forall y(\forall x(r(z, f(x, y)) \rightarrow r(z, y)))$;

(b) $\forall y(\forall x(r(z, f(x, y))) \rightarrow r(z, y))$;

(c) $\forall x(\neg r(x, y) \rightarrow \exists z(r(f(x, z), g(y)))$,

w strukturze $\mathcal{A} = \langle \mathbb{Z}, f^{\mathcal{A}}, r^{\mathcal{A}} \rangle$, przy wartościowaniach $v(z) = 5$ i $w(z) = 7$, jeżeli:

(a) $f^{\mathcal{A}}(m, n) = \min(m, n)$, dla $m, n \in \mathbb{Z}$, a $r^{\mathcal{A}}$ jest relacją $\geq$;

(b) $f^{\mathcal{A}}(m, n) = m^2 + n^2$, dla $m, n \in \mathbb{Z}$, a $r^{\mathcal{A}}$ jest relacją $\leq$;

(c) $f^{\mathcal{A}}(m, n) = 5mn$, dla $m, n \in \mathbb{Z}$, a $r^{\mathcal{A}}$ jest relacją podzielności.

57. Wyznaczyć wartość formuły $\forall y(\exists z(r(z, x) \wedge r(z, y)) \rightarrow r(x, y))$

(a) w strukturze $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, r^{\mathcal{A}} \rangle$, gdzie $r^{\mathcal{A}}$ jest relacją podzielności;

(b) w strukturze $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, r^{\mathcal{A}} \rangle$, gdzie $r^{\mathcal{A}}$ jest relacją przystawania modulo 7,

przy wartościowaniach $v(x) = 3$, $w(x) = 6$ i $u(x) = 14$.

58. Wyznaczyć wartość formuły $\forall x(\neg r(x,y) \to \exists z(r(f(x,z), g(y))))$ w $\mathcal{A} = \langle \mathbb{Q}, f^{\mathcal{A}}, g^{\mathcal{A}}, r^{\mathcal{A}} \rangle$, gdzie $f^{\mathcal{A}}$ jest mnożeniem, relacja $r^{\mathcal{A}}$ jest równością, a $g^{\mathcal{A}}(q) = q + 1$ dla $q \in \mathbb{Q}$, przy wartościowaniach $v(y) = 0$, $w(y) = -1$ i $u(y) = 2$.

59. Podaj przykład modelu i wartościowania, przy którym formuła

$$„P(x, f(x)) \to \forall x \exists y P(f(y), x)”$$

jest: a) spełniona; b) nie spełniona.

60. Podaj przykład zdania prawdziwego w strukturze $\langle \mathbb{N}, +, 0 \rangle$ ale nie w strukturze $\langle \mathbb{N}^2, \#, \langle 0, 0 \rangle \rangle$, gdzie operacja $\#$ jest określona tak: $\langle a, b \rangle \# \langle c, d \rangle = \langle a + c, b + d \rangle$.

Wskazówka: Jakie elementy nie dają się przedstawić w postaci sumy dwóch niezerowych składników?

61. Sygnatura Σ składa się z symboli $r, s \in \Sigma_1^R$, $R, S \in \Sigma_2^R$ i $g \in \Sigma_2$. Napisać takie zdania φ i ψ, że:

(a) zdanie φ jest prawdziwe dokładnie w tych modelach $\mathcal{A} = \langle A, R^{\mathcal{A}}, S^{\mathcal{A}}, r^{\mathcal{A}}, s^{\mathcal{A}}, g^{\mathcal{A}} \rangle$, w których obie relacje $R^{\mathcal{A}}$, $S^{\mathcal{A}}$ są przechodnie, ale ich suma nie jest przechodnia;

(b) zdanie ψ jest prawdziwe dokładnie w tych modelach $\mathcal{A} = \langle A, R^{\mathcal{A}}, S^{\mathcal{A}}, r^{\mathcal{A}}, s^{\mathcal{A}}, g^{\mathcal{A}} \rangle$, w których $s^{\mathcal{A}}$ jest obrazem iloczynu kartezjańskiego $r^{\mathcal{A}} \times r^{\mathcal{A}}$ przy funkcji $g^{\mathcal{A}}$.

Rozwiązanie:

(a) $\forall x \forall y \forall z(R(x,y) \wedge R(y,z) \to R(x,z)) \wedge \forall x \forall y \forall z(S(x,y) \wedge S(y,z) \to S(x,z))$
$\wedge \exists x \exists y \exists z((R(x,y) \vee S(x,y)) \wedge (R(y,z) \vee S(y,z)) \wedge \neg R(x,z) \wedge \neg S(x,z)))$;

(b) $\forall x(s(x) \leftrightarrow \exists y \exists z(x = g(y,z) \wedge r(y) \wedge r(z)))$.

62. Sygnatura Σ składa się z jednoargumentowych symboli relacyjnych R, S i jednego jednoargumentowego symbolu funkcyjnego f. Napisać takie zdania φ i ψ, że:

(a) zdanie φ jest prawdziwe dokładnie w tych modelach, $\mathcal{A} = \langle A, R^{\mathcal{A}}, S^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}} \rangle$, w których obraz zbioru $R^{\mathcal{A}}$ przy funkcji $f^{\mathcal{A}}$ zawiera się w zbiorze $S^{\mathcal{A}}$.

(b) zdanie ψ jest prawdziwe dokładnie w tych modelach $\mathcal{A} = \langle A, R^{\mathcal{A}}, S^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}} \rangle$, w których zbiór $S^{\mathcal{A}}$ jest przeciwobrazem zbioru $R^{\mathcal{A}}$ przy przekształceniu f.

63. Sygnatura Σ składa się z jednoargumentowych symboli relacyjnych R, S i jednego jednoargumentowego symbolu funkcyjnego f. Napisać takie zdania φ i ψ, że:

(a) zdanie φ jest prawdziwe dokładnie w tych modelach, $\mathcal{A} = \langle A, R^{\mathcal{A}}, S^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}} \rangle$, w których przeciwobraz zbioru $R^{\mathcal{A}}$ przy funkcji f zawiera się w zbiorze $S^{\mathcal{A}}$.

(b) zdanie ψ jest prawdziwe dokładnie w tych modelach $\mathcal{A} = \langle A, R^{\mathcal{A}}, S^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}} \rangle$, w których zbiór $S^{\mathcal{A}}$ jest swoim własnym obrazem przy przekształceniu f, a zbiór $R^{\mathcal{A}}$ jest niepusty.

64. Sygnatura Σ składa się z jednego symbolu $f \in \Sigma_1$. Napisać zdanie φ, które

(a) jest prawdziwe dokładnie w tych modelach $\mathcal{A} = \langle A, f^{\mathcal{A}} \rangle$, w których przeciwobraz każdego zbioru jednoelementowego ma co najwyżej dwa elementy;

(b) jest prawdziwe dokładnie w tych modelach $\mathcal{A} = \langle A, f^{\mathcal{A}} \rangle$, w których przeciwobraz każdego zbioru jednoelementowego ma co najmniej dwa elementy;

(c) jest prawdziwe dokładnie w tych modelach $\mathcal{A} = \langle A, f^{\mathcal{A}} \rangle$, w których funkcja f przyjmuje każdą swoją wartość co najwyżej raz;

(d) jest prawdziwe dokładnie w tych modelach $\mathcal{A} = \langle A, f^{\mathcal{A}} \rangle$, w których funkcja f przyjmuje każdą swoją wartość co najmniej raz.

65. Sygnatura Σ składa się z jednego symbolu $f \in \Sigma_1$. Napisać zdanie φ, które

(a) jest prawdziwe w modelu $\langle \mathbb{N}, s \rangle$, gdzie s oznacza następnik, a nie jest prawdziwe w modelu $\langle \mathbb{N}, q \rangle$, gdzie $q(n) = n^2 + 1$, dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

(b) jest prawdziwe w modelu $\langle \mathbb{N}, s \rangle$, gdzie s oznacza następnik, a nie jest prawdziwe w modelu $\langle \mathbb{N}, g \rangle$, gdzie $g(n) = n^2 \bmod 7$, dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

66. Sygnatura L składa się z dwóch jednoargumentowych symboli funkcyjnych f i g oraz dwuargumentowego symbolu relacyjnego r. Napisać zdanie φ, które jest prawdziwe dokładnie w tych modelach $\mathcal{A} = \langle A, f^{\mathcal{A}}, g^{\mathcal{A}}, r^{\mathcal{A}} \rangle$, w których

(a) funkcja $f^{\mathcal{A}}$ jest odwrotna do $g^{\mathcal{A}}$;

(b) funkcja $f^{\mathcal{A}}$ jest funkcją stałą;

(c) $r^{\mathcal{A}}$ nie jest ani spójna ani symetryczna.

67. Sygnatura L składa się z dwóch jednoargumentowych symboli funkcyjnych f i g oraz dwuargumentowego symbolu relacyjnego r. Napisać zdanie φ, które jest prawdziwe dokładnie w tych modelach $\mathcal{A} = \langle A, f^{\mathcal{A}}, g^{\mathcal{A}}, r^{\mathcal{A}} \rangle$, w których

(a) funkcje $f^{\mathcal{A}}$ i $g^{\mathcal{A}}$ są różne;

(b) funkcja $f^{\mathcal{A}}$ nie jest różnowartościowa;

(c) $r^{\mathcal{A}}$ nie jest przechodnia.

68. Sygnatura Σ składa się z dwuargumentowych symboli relacyjnych r i s oraz dwuargumentowego symbolu funkcyjnego f. Napisać (możliwie najprostsze) zdanie, które jest prawdziwe dokładnie w tych modelach $\mathcal{A} = \langle A, r^{\mathcal{A}}, s^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}} \rangle$, w których:

(a) Iloczyn mnogościowy relacji $r^{\mathcal{A}}$ i $s^{\mathcal{A}}$ zawiera się w ich złożeniu;

(b) Iloczyn mnogościowy relacji $r^{\mathcal{A}}$ i $s^{\mathcal{A}}$ zawiera się w ich sumie;

(c) Istnieje algebra $\langle B, f^{\mathcal{B}} \rangle$ i homomorfizm $h : \langle A, f^{\mathcal{A}} \rangle \to \langle B, f^{\mathcal{B}} \rangle$, którego jądrem jest $r^{\mathcal{A}}$.

(d) Obraz iloczynu $\mathrm{id}_A \cap r^{\mathcal{A}}$ przy funkcji $f^{\mathcal{A}}$ ma mniej niż dwa elementy.

Rozwiązanie:

(a) $\forall x \forall y (r(x,y) \wedge s(x,y) \to \exists z (r(x,z) \wedge s(z,y)))$;

(b) $\neg\bot$, bo warunek zachodzi zawsze;

(c) $[\forall x r(x,x)] \wedge [\forall x \forall y (r(x,y) \to r(y,x))] \wedge [\forall x \forall y \forall z (r(x,y) \wedge r(y,z) \to r(x,z))] \wedge$ $\wedge [\forall x \forall x' \forall y \forall y' (r(x,x') \wedge r(y,y') \to r(f(x,y), f(x'y')))]$, bo relacja $r^{\mathcal{A}}$ ma być kongruencją w $\langle A, f^{\mathcal{A}} \rangle$;

(d) $\forall x \forall y (r(x,x) \wedge r(y,y) \to f(x,x) = f(y,y))$.

69. Sygnatura Σ składa się z symboli $R \in \Sigma_2^R$, $r \in \Sigma_1^R$ i $f \in \Sigma_2$. Napisać takie zdania φ i ψ, że:

(a) zdanie φ jest prawdziwe dokładnie w tych modelach, $\mathcal{A} = \langle A, R^{\mathcal{A}}, r^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}} \rangle$, w których relacja $R^{\mathcal{A}}$ jest funkcją;

(b) zdanie ψ jest prawdziwe dokładnie w tych modelach $\mathcal{A} = \langle A, R^{\mathcal{A}}, r^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}} \rangle$, w których $R^{\mathcal{A}}$ jest przeciwobrazem zbioru $r^{\mathcal{A}}$ przy funkcji $f^{\mathcal{A}}$.

70. Sygnatura Σ składa się z symboli $S \in \Sigma_2^R$, $P \in \Sigma_1^R$ i $f \in \Sigma_1$. Napisać takie zdania φ i ψ, że:

(a) Zdanie φ jest prawdziwe dokładnie w tych modelach $\mathcal{A} = \langle A, P^{\mathcal{A}}, S^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}} \rangle$, w których $S^{\mathcal{A}} \subseteq P^{\mathcal{A}} \times \vec{f}^{\mathcal{A}}(P^{\mathcal{A}})$;

(b) Zdanie ψ jest prawdziwe dokładnie w tych modelach $\mathcal{A} = \langle A, P^{\mathcal{A}}, S^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}} \rangle$, w których $S^{\mathcal{A}}$ jest funkcją odwrotną do $f^{\mathcal{A}}$.

Rozwiązanie:

(a) $\forall x \forall y (S(x,y) \to P(x) \wedge \exists z (P(z) \wedge f(z) = y))$;

(b) $\forall x \forall y (f(x) = f(y) \to x = y) \wedge \forall x \forall y ((f(x) = y \to S(y,x)) \wedge (S(y,x) \to f(x) = y))$.

71. Sygnatura Σ składa się z symboli $S, P \in \Sigma_1^R$ i $f \in \Sigma_1$. Napisać takie zdania φ i ψ, że:

(a) Zdanie φ jest prawdziwe dokładnie w tych modelach $\mathcal{A} = \langle A, P^{\mathcal{A}}, S^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}} \rangle$, w których $S^{\mathcal{A}} \cap P^{\mathcal{A}} = \emptyset$, ale $\vec{f}^{\mathcal{A}}(S^{\mathcal{A}}) \subseteq P^{\mathcal{A}}$;

(b) Zdanie ψ jest prawdziwe dokładnie w tych modelach $\mathcal{A} = \langle A, P^{\mathcal{A}}, S^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}} \rangle$, w których funkcja $f^{\mathcal{A}}|_{S^{\mathcal{A}}}$ (tj. funkcja $f^{\mathcal{A}}$ obcięta do $S^{\mathcal{A}}$) jest różnowartościowa.

72. Sygnatura Σ składa się z dwóch jednoargumentowych symboli relacyjnych R i S, dwuargumentowego symbolu funkcyjnego f i jednoargumentowego symbolu funkcyjnego g. Napisać takie zdania φ i ψ, że:

   (a) zdanie φ jest prawdziwe dokładnie w tych modelach, $\mathcal{A} = \langle A, f^{\mathcal{A}}, g^{\mathcal{A}}, R^{\mathcal{A}}, S^{\mathcal{A}} \rangle$, w których obraz iloczynu kartezjańskiego $R^{\mathcal{A}} \times S^{\mathcal{A}}$ przy przekształceniu f zawiera się w iloczynie mnogościowym $R^{\mathcal{A}} \cap S^{\mathcal{A}}$.

   (b) zdanie ψ jest prawdziwe dokładnie w tych modelach $\mathcal{A} = \langle A, f^{\mathcal{A}}, g^{\mathcal{A}}, R^{\mathcal{A}}, S^{\mathcal{A}} \rangle$, w których zbiory wartości funkcyj f i $g \circ f$ są takie same. (Symbol „$\circ$” oznacza składanie funkcyj.)

   Rozwiązanie: (a) $\forall x \forall y (R(x) \wedge S(y) \rightarrow R(f(x, y)) \wedge S(f(x, y))$;
   (b) $\forall x (\exists y \exists z (x = f(y, z)) \leftrightarrow \exists y \exists z (x = g(f(y, z))))$.

73. Sygnatura Σ składa się z dwóch jednoargumentowych symboli relacyjnych R i S, dwuargumentowego symbolu funkcyjnego f i jednoargumentowego symbolu funkcyjnego g. Napisać takie zdania φ i ψ, że:

   (a) zdanie φ jest prawdziwe dokładnie w tych modelach, $\mathcal{A} = \langle A, f^{\mathcal{A}}, g^{\mathcal{A}}, R^{\mathcal{A}}, S^{\mathcal{A}} \rangle$, w których przeciwobraz iloczynu mnogościowego $R^{\mathcal{A}} \cap S^{\mathcal{A}}$ przy przekształceniu f zawiera się w iloczynie kartezjańskim $R^{\mathcal{A}} \times S^{\mathcal{A}}$.

   (b) zdanie ψ jest prawdziwe dokładnie w tych modelach $\mathcal{A} = \langle A, f^{\mathcal{A}}, g^{\mathcal{A}}, R^{\mathcal{A}}, S^{\mathcal{A}} \rangle$, w których zbiory wartości funkcyj f i g są takie same.

74. Sygnatura Σ składa się z dwóch dwuargumentowych symboli relacyjnych R i S. Napisać takie zdania φ_1, φ_2 i φ_3, że

   (a) zdanie φ_1 jest prawdziwe dokładnie w tych modelach, $\mathcal{A} = \langle A, R^{\mathcal{A}}, S^{\mathcal{A}} \rangle$, w których $R^{\mathcal{A}}$ jest relacją równoważności o dokładnie trzech klasach abstrakcji.

   (b) zdanie φ_2 jest prawdziwe dokładnie w tych modelach, $\mathcal{A} = \langle A, R^{\mathcal{A}}, S^{\mathcal{A}} \rangle$, w których złożenie relacji $R^{\mathcal{A}}$ z relacją $S^{\mathcal{A}}$ jest identyczne ze złożeniem relacji $S^{\mathcal{A}}$ z relacją $R^{\mathcal{A}}$.

   (c) zdanie φ_3 jest prawdziwe dokładnie w tych modelach $\mathcal{A} = \langle A, R^{\mathcal{A}}, S^{\mathcal{A}} \rangle$, w których relacja $S^{\mathcal{A}}$ jest najmniejszą relacją symetryczną zawierajacą $R^{\mathcal{A}}$.

   Rozwiązanie:

   (a) $[\forall x R(x, x)] \wedge [\forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow R(y, x))] \wedge [\forall x \forall y \forall z (R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z))] \wedge [\exists x \exists y \exists z (\neg R(x, y) \wedge \neg R(x, z) \wedge \neg R(y, z))] \wedge [\forall x \forall y \forall z \forall u (R(x, y) \vee R(x, z) \vee R(x, u) \vee R(y, z) \vee R(y, u) \vee R(z, u)]$.

   (b) $\forall x \forall y (\exists z (R(x, z) \wedge S(z, y)) \leftrightarrow \exists z (S(x, z) \wedge R(z, y)))$.

   (c) $\forall x \forall y (S(x, y) \leftrightarrow R(x, y) \vee R(y, x))$.

75. Napisać zdanie pierwszego rzędu prawdziwe dokładnie w tych modelach $\langle A, r^A \rangle$, w których $r^A = B \times C$, dla pewnych zbiorów B, C.

76. Napisać zdanie pierwszego rzędu prawdziwe dokładnie w tych modelach $\mathcal{A}$, w których

    (a) relacja $S^{\mathcal{A}}$ jest funkcją o dziedzinie $P^{\mathcal{A}}$;

    (b) $S^{\mathcal{A}}$ jest relacją równoważności i ma dokładnie trzy klasy abstrakcji;

    (c) zbiór $P^{\mathcal{A}}$ jest rzutem relacji $S^{\mathcal{A}}$ na pierwszą współrzędną.

77. Sygnatura Σ składa się z dwuargumentowych symboli relacyjnych r i s oraz dwuargumentowego symbolu funkcyjnego f. Napisać (możliwie najkrótsze) zdanie, które jest prawdziwe dokładnie w tych modelach $\mathcal{A} = \langle A, r^{\mathcal{A}}, s^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}} \rangle$, w których:

    (a) Złożenie relacji $r^{\mathcal{A}}$ i $s^{\mathcal{A}}$ zawiera się w ich iloczynie $r^{\mathcal{A}} \cap s^{\mathcal{A}}$;

    (b) Zbiór wartości funkcji f jest rzutem sumy $r^{\mathcal{A}} \cup s^{\mathcal{A}}$ na pierwszą współrzędną;

    (c) Relacja $r^{\mathcal{A}}$ nie jest funkcją z A w A;

    (d) Obraz $r^{\mathcal{A}}$ przy funkcji $f^{\mathcal{A}}$ jest podstrukturą w $\mathcal{A}$;

    (e) Obraz zbioru $A \times A$ przy funkcji $f^{\mathcal{A}}$ jest pusty.

    Rozwiązanie:

    (a) $\forall x \forall z \forall y (r(x,y) \wedge s(y,z) \rightarrow r(x,z) \wedge s(x,z))$.

    (b) $\forall x (\exists y \exists z (x = f(y,z)) \leftrightarrow \exists y (r(x,y) \vee s(x,y)))$.

    (c) $\exists x (\neg \exists y r(x,y) \vee \exists y \exists z (r(x,y) \wedge r(x,z) \wedge \neg(y = z)))$.

    (d) $\exists x \exists y\, r(x,y) \;\wedge\; \forall x \forall y \forall x' \forall y' (r(x,y) \wedge r(x',y') \rightarrow$
    $\rightarrow \exists x'' \exists y'' (r(x'',y'') \wedge f(x'',y'') = f(f(x,y), f(x',y'))))$.

    (e) $\perp$.

78. Dla każdej z par struktur:

    (a) $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ i $\langle \{m - \frac{1}{n} \mid m, n \in \mathbb{N} - \{0\}\}, \leq \rangle$;

    (b) $\langle \mathbb{N}, + \rangle$ i $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$;

    (c) $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ i $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$,

    wskaż zdanie prawdziwe w jednej z nich a w drugiej nie.

79. Sygnatura Σ składa się z jednego dwuargumentowego symbolu relacyjnego R. Napisać takie zdania φ i ψ, że:

    (a) zdanie φ jest prawdziwe w modelu $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, \leq \rangle$, ale nie w $\mathcal{B} = \langle \mathbb{N} - \{0\}, \mid\ \rangle$, gdzie symbol „|" oznacza relację podzielności, określoną tak:

    $$m|n \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } n = k \cdot m, \text{ dla pewnego } k \in \mathbb{N} - \{0\}.$$

(b) zdanie ψ jest prawdziwe w modelu $\mathfrak{C} = \langle \{a,b\}^*, \leq \rangle$, gdzie

$$w \leq v \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } v = w \cdot u \text{ dla pewnego } u \in \{a,b\}^*,$$

ale nie w modelu $\mathcal{D} = \langle \{a,b\}^*, \preceq \rangle$, gdzie

$$w \preceq v \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } |w| \leq |v|.$$

Rozwiązanie:

(a) Pierwszy model jest porządkiem liniowym, a drugi tylko częściowym, bo relacja podzielności nie jest spójna. Jako φ można przyjąć formułę

$$\forall x \forall y (R(x,y) \vee R(y,x)).$$

(b) Pierwszy model jest porządkiem częściowym, a drugi nie, bo relacja $\preceq$ nie jest antysymetryczna. Jako ψ można przyjąć formułę

$$\forall x \forall y (R(x,y) \wedge R(y,x) \rightarrow x = y).$$

80. Sygnatura Σ składa się z jednego dwuargumentowego symbolu funkcyjnego $+$ i jednego symbolu stałej 0. Napisać takie zdania φ i ψ, że:

(a) zdanie φ jest prawdziwe w modelu $\mathcal{A} = \langle \mathbb{Z}, +, 0 \rangle$, ale nie w modelu $\mathcal{B} = \langle \mathbb{N}, +, 0 \rangle$;

(b) zdanie ψ jest prawdziwe w modelu $\mathcal{B} = \langle \mathbb{Z}, +, 0 \rangle$, ale nie w modelu $\mathfrak{C} = \langle \mathbb{Q}, +, 0 \rangle$.

81. Podaj przykłady:

(a) takiego zdania φ, że $\langle \{a,b\}^*, \cdot, \varepsilon \rangle \models \varphi$, ale $\langle \mathbb{N}, +, 0 \rangle \not\models \varphi$;

(b) takiego zdania φ, że $\langle \{a,b\}^*, \cdot, \varepsilon \rangle \models \varphi$, ale $\langle \{a,b,c\}^*, \cdot, \varepsilon \rangle \not\models \varphi$;

(c) formuły spełnialnej, ale tylko w modelach nieskończonych.

82. Wskazać formułę pierwszego rzędu:

(a) spełnialną w ciele liczb rzeczywistych ale nie w ciele liczb wymiernych;

(b) spełnialną w algebrze $\mathbb{N}$ z mnożeniem, ale nie w algebrze $\mathbb{N}$ z dodawaniem;

(c) spełnialną w $\langle \{a,b\}^*, \cdot, \varepsilon \rangle$ ale nie w $\langle \{a,b,c\}^*, \cdot, \varepsilon \rangle$.

83. Wskazać (o ile istnieje) model i wartościowanie spełniające daną formułę i nie spełniające tej formuły:

(a) $\forall y (r(x) \rightarrow r(y))$;

(b) $\forall y (r(x) \wedge r(y) \rightarrow r(f(x,y))$;

(c) $\forall x (q(x,y) \rightarrow q(f(x),y)$;

(d) $\forall x \forall y (r(x) \wedge r(y) \rightarrow r(f(x,y))$;

(e) $\forall x (r(x) \vee p(x)) \rightarrow (\forall x r(x) \vee \forall x p(x))$;

(f) $\forall x \exists y (q(x,y) \vee \forall y \neg q(x,y))$;

(g) $\exists x \forall y \exists z (q(x, z) \wedge \neg q(x, y))$;

(h) $\forall x \forall y (\neg(x = y) \rightarrow \exists z (P(x, z) \wedge P(y, z))$;

(i) $\forall x \exists y \exists z (\neg(y = z) \wedge P(x, y) \wedge P(x, z))$.

Tautologie, wynikanie, spełnialność

84. Sygnatura Σ składa się z symboli $P, Q \in \Sigma_1^R$ i $f \in \Sigma_1$.

(a) Wykazać, że formuła „$\exists x \forall y (P(x) \vee Q(y)) \rightarrow \forall y (P(f(y)) \vee Q(y))$" jest spełnialna i nie jest tautologią.

(b) Wykazać, że formuła „$\forall y (P(f(y)) \vee Q(y)) \rightarrow \exists x \forall y (P(x) \vee Q(y))$ jest tautologią.

Rozwiązanie:

(a) Nasza formuła jest spełnialna na przykład w modelu $\mathfrak{C} = \langle \mathbb{N}, P^{\mathfrak{C}}, Q^{\mathfrak{C}}, f^{\mathfrak{C}} \rangle$, gdzie $\mathbb{N}$ jest zbiorem wszystkich liczb naturalnych, funkcja $f^{\mathfrak{C}}$ jest stale równa 7, a obie relacje $P^{\mathfrak{C}}$ i $Q^{\mathfrak{C}}$ są pełne (tj. $P^{\mathfrak{C}} = Q^{\mathfrak{C}} = \mathbb{N}$). W tym modelu konkluzja implikacji jest w oczywisty sposób prawdziwa.

Formuła ta nie jest tautologią, bo nie jest prawdziwa na przykład w modelu $\mathcal{B} = \langle \mathbb{N}, P^{\mathcal{B}}, Q^{\mathcal{B}}, f^{\mathcal{B}} \rangle$, gdzie $Q^{\mathcal{B}}$ jest zbiorem pustym, $P^{\mathcal{B}} = \{0, 1, 2\}$, a $f^{\mathcal{B}}$ jest funkcją następnika. Teraz przesłanka jest spełniona, bo $\mathcal{B}, 0 \models P(x)$, więc także $\mathcal{B}, 0 \models \forall y (P(x) \vee Q(y))$. Ale $\mathcal{B}, 4 \not\models P(f(y)) \vee Q(y)$, bo $4 \notin Q^{\mathcal{B}}$ oraz $f^{\mathcal{B}}(4) = 5 \notin P^{\mathcal{B}}$. Zatem konkluzja nie jest spełniona.

(b) Weźmy dowolny model $\mathcal{A} = \langle A, P^{\mathcal{A}}, Q^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}} \rangle$. Pokażemy, że $\mathcal{A} \models \forall y (P(f(y)) \vee Q(y)) \rightarrow \exists x \forall y (P(x) \vee Q(y))$.

Rozpatrzymy dwa przypadki. Najpierw przypuśćmy, że $f^{\mathcal{A}}(a) \in P^{\mathcal{A}}$, dla pewnego $a \in A$. Wtedy mamy $\mathcal{A}, f^{\mathcal{A}}(a) \models P(x)$. Stąd $\mathcal{A}, f^{\mathcal{A}}(a) \models \forall y (P(x) \vee Q(y))$, a więc $\mathcal{A} \models \exists x \forall y (P(x) \vee Q(y))$.

W drugim przypadku $f^{\mathcal{A}}(a) \notin P^{\mathcal{A}}$ (czyli $\mathcal{A}, a \not\models P(f(y))$), dla wszystkich $a \in A$. Można założyć, że $\mathcal{A} \models \forall y (P(f(y)) \vee Q(y))$ (w przeciwnym razie cała formuła jest trywialnie prawdziwa). To znaczy, że $\mathcal{A}, a \models P(f(y)) \vee Q(y)$, dla wszystkich $a \in A$. Ale teraz mamy zawsze $\mathcal{A}, a \not\models P(f(y))$, więc dla każdego $a \in A$ musi być $\mathcal{A}, a \models Q(y)$. Biorąc jakiekolwiek $b \in B$, otrzymamy $\mathcal{A}, a, b \models P(x) \vee Q(y)$, skąd $\mathcal{A}, b \models \forall y (P(x) \vee Q(y))$ i wreszcie $\mathcal{A} \models \exists x \forall y (P(x) \vee Q(y))$.

85. Czy poprawne jest wynikanie

- $(Q \rightarrow R) \rightarrow Q,\ \forall x (P(x) \rightarrow Q) \rightarrow R \models R$?
- $\forall x (P(x) \rightarrow Q) \rightarrow Q \models Q$?

86. (Z Mendelsona) Wykazać, że ze zdań:

- *Każdy, kto rozumie logikę, może każdego jej nauczyć;*
- *Jest ktoś, kto rozumie logikę;*

wynika zdanie:

- *Każdy może być przez kogoś nauczony logiki.*

Wskazówka: wprowadzić oznaczenia „$R(x)$" (*x rozumie logikę*) i „$M(x, y)$" (*x może nauczyć y logiki*), napisać odpowiednią implikację i zbadać jej prawdziwość.

Rozwiązanie: Pierwsze założenie można zapisać tak: $\forall x(R(x) \to \forall y M(x, y))$, a drugie tak: $\exists x R(x)$. Należy pokazać, że zdanie $\forall y \exists x M(x, y)$ jest ich konsekwencją, tj. należy pokazać, że

$$\forall x(R(x) \to \forall y M(x, y)), \exists x R(x) \quad \models \quad \forall y \exists x M(x, y).$$

Jeśli oba założenia są prawdziwe w modelu $\mathcal{A} = \langle A, R^{\mathcal{A}}, M^{\mathcal{A}} \rangle$, to zbiór $R^{\mathcal{A}}$ jest niepusty (drugie zdanie) i każdy element $a \in R^{\mathcal{A}}$ ma własność $\mathcal{A}, a \models \forall y M(x, y)$ (pierwsze zdanie). Jeśli teraz b jest dowolnym elementem modelu, to mamy $\mathcal{A}, a, b \models M(x, y)$, czyli po prostu $\langle a, b \rangle \in M^{\mathcal{A}}$. Stąd $A, b \models \exists x M(x, y)$, a ponieważ b było dowolne, więc ostatecznie $\mathcal{A} \models \forall y \exists x M(x, y)$, co należało udowodnić.

87. Rozpatrzmy następujące rozumowanie:

   – *Wszystkie koty są drapieżnikami;*
   – *Niektóre drapieżniki mają wąsy;*
   – *Zatem niektóre koty mają wąsy.*

Wprowadzić oznaczenia „$K(x)$" (*x jest kotem*), „$D(x)$" (*x jest drapieżnikiem*) i „$W(x)$" (*x ma wąsy*), napisać odpowiednią implikację i zbadać, czy jest ona tautologią. Wywnioskować z tego, czy rozumowanie jest poprawne.

88. Rozpatrzmy następujące rozumowania:

   I. *Każdy kot jest drapieżnikiem;*
   Nie każdy pies jest drapieżnikiem;
   Zatem żaden pies nie jest kotem.

   II. *Każdy kot jest drapieżnikiem;*
   Nie każdy pies jest drapieżnikiem;
   Zatem pewien pies nie jest kotem.

Wprowadzić oznaczenia „$K(x)$” (*x jest kotem*), „$P(x)$” (*x jest psem*) i „$D(x)$” (*x jest drapieżnikiem*), napisać odpowiednie implikacje i zbadać, czy są one tautologiami. Wywnioskować z tego, czy rozumowania są poprawne.

Rozwiązanie: W części I mamy zdanie φ_1 postaci:

$$\forall x(K(x) \to D(x)) \wedge \neg\forall x(P(x) \to D(x)) \to \forall x(P(x) \to \neg K(x)).$$

To nie jest tautologia. Niech $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, K^{\mathcal{A}}, D^{\mathcal{A}}, P^{\mathcal{A}} \rangle$, gdzie dla dowolnego n:

- $x \in K^{\mathcal{A}}$ wtedy i tylko wtedy gdy x jest podzielne przez 4;
- $x \in D^{\mathcal{A}}$ wtedy i tylko wtedy gdy x jest parzyste;
- $x \in P^{\mathcal{A}}$ wtedy i tylko wtedy gdy x jest podzielne przez 3.

Ponieważ każda liczba podzielna przez 4 jest parzysta, więc $\mathcal{A} \models \forall x(K(x) \to D(x))$. Ponieważ liczba 3 nie jest parzysta, więc także $\mathcal{A} \models \neg\forall x(P(x) \to D(x))$. Ale $\mathcal{A}, 6 \models P(x)$ i $\mathcal{A}, 6 \not\models \neg K(x)$, więc $\mathcal{A} \not\models \forall x(P(x) \to \neg K(x))$. Zatem $\mathcal{A} \not\models \varphi_1$.

W części II, zdanie φ_2 jest takie:

$$\forall x(K(x) \to D(x)) \wedge \neg\forall x(P(x) \to D(x)) \to \exists x(P(x) \wedge \neg K(x)).$$

To zdanie jest tautologią. Rozpatrzmy bowiem dowolny model $\mathcal{A} = \langle A, K^{\mathcal{A}}, D^{\mathcal{A}}, P^{\mathcal{A}} \rangle$. Jeżeli $\mathcal{A} \not\models \forall x(K(x) \to D(x))$ lub $\mathcal{A} \not\models \neg\forall x(P(x) \to D(x))$ to oczywiście $\mathcal{A} \models \varphi_2$. Załóżmy więc, że $\mathcal{A} \models \forall x(K(x) \to D(x))$ oraz $\mathcal{A} \models \neg\forall x(P(x) \to D(x))$. Oznacza to, że w naszym modelu mamy $K^{\mathcal{A}} \subseteq D^{\mathcal{A}}$, ale mamy też takie a, że $\mathcal{A}, a \not\models P(x) \to D(x)$. To znaczy, że $a \in P^{\mathcal{A}}$ ale $a \notin D^{\mathcal{A}}$. Skoro $K^{\mathcal{A}} \subseteq D^{\mathcal{A}}$, więc tym bardziej $a \notin K^{\mathcal{A}}$. A zatem $\mathcal{A}, a \models P(x) \wedge \neg K(x)$ i w konsekwencji $\mathcal{A} \models \exists x(P(x) \wedge \neg K(x))$. Zawsze więc mamy $\mathcal{A} \models \varphi_2$.

Konkluzja: drugie rozumowanie jest poprawne a pierwsze nie.

89. Rozpatrzmy następujące rozumowania:

I *Żadna kobieta nie jest mężczyzną;*

Niektórzy mężczyźni są dziećmi;

Zatem nie każde dziecko jest kobietą.

II *Żadna kobieta nie jest mężczyzną;*

Niektórzy mężczyźni są dziećmi;

Zatem nie każde dziecko jest mężczyzną.

Wprowadzić oznaczenia „$K(x)$” (*x jest kobietą*), „$M(x)$” (*x jest mężczyzną*) i „$D(x)$” (*x jest dzieckiem*), napisać odpowiednie implikacje i zbadać, czy są one tautologiami. Wywnioskować z tego, czy rozumowania są poprawne.

90. Czy formuła „$(\forall x P(x) \vee \forall x \exists y Q(x,y)) \to \forall x \exists y (P(x) \vee Q(x,y))$” jest tautologią? A implikacja odwrotna?

91. Zbadać, czy formuły:

    (a) $\forall x \exists y P(x,y) \to \exists x \forall y P(x,y)$;

    (b) $\exists x \forall y P(x,y) \to \forall y \exists x P(x,y)$,

    są spełnialne i czy są tautologiami.

92. Zbadać, czy formuły:

    (a) $(\forall x R(x) \to \exists y S(y)) \to \forall x \exists y (R(x) \to S(y))$;

    (b) $(\forall x R(x) \to \exists y S(y)) \to \exists x (R(x) \to S(x))$,

    są spełnialne i czy są tautologiami.

93. Zbadać czy następujące formuły są tautologiami i czy są spełnialne:

    (a) $(\forall x P(x) \to Q(y)) \to \forall x (P(x) \to Q(y))$;

    (b) $(P(x) \to \exists y Q(y)) \to \exists y (P(x) \to Q(y))$.

94. Zbadać czy następujące formuły są tautologiami i czy są spełnialne:

    (a) $(\forall x P(x) \to Q(y)) \leftrightarrow \exists x (P(x) \to Q(y))$;

    (b) $(\forall x P(x) \to Q(x)) \leftrightarrow \exists x (P(x) \to Q(x))$.

95. Zbadać, czy następujące formuły są tautologiami:

    (a) $\exists y \forall z (P(y) \to Q(z)) \to (\exists y P(y) \to \forall z Q(z))$;

    (b) $(\exists y P(y) \to \forall z Q(z)) \to \forall y \forall z (P(y) \to Q(z))$.

    Rozwiązanie: (a) Ta formuła nie jest tautologią. Rozpatrzmy bowiem model $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, P^{\mathcal{A}}, Q^{\mathcal{A}} \rangle$, w którym $P^{\mathcal{A}} = Q^{\mathcal{A}} = \{13\}$. Wówczas $\mathcal{A} \models \exists y P(y)$, bo $P^{\mathcal{A}} \neq \emptyset$, oraz $\mathcal{A} \not\models \forall z Q(z)$, bo $Q^{\mathcal{A}} \neq \mathbb{N}$. Zatem $\mathcal{A} \not\models \exists y P(y) \to \forall z Q(z)$. Tymczasem $\mathcal{A} \models \exists y \forall z (P(y) \to Q(z))$, bo $\mathcal{A}, v \models \forall z (P(y) \to Q(z))$ na przykład dla $v(y) = 7$.

    (b) Ta formuła jest tautologią. Można się o tym przekonać, stwierdziwszy, że założenie $\exists y P(y) \to \forall z Q(z)$ jest równoważne formule $\neg \exists y P(y) \vee \forall z Q(z)$, i dalej kolejno każdej z następujących formuł:

    $$\forall y \neg P(y) \vee \forall z Q(z);$$

    $$\forall y (\neg P(y) \vee \forall z Q(z));$$

    $$\forall y \forall z (\neg P(y) \vee Q(z));$$

    $$\forall y \forall z (P(y) \to Q(z)).$$

A zatem formuła (b) jest równoważna formule

$$\forall y \forall z (P(y) \to Q(z)) \to \forall y \forall z (P(y) \to Q(z)),$$

która oczywiście jest tautologią.

96. Niech R i S będą symbolami jednoargumentowych relacji. Zbadać, czy następujące formuły pierwszego rzędu są tautologiami:

    (a) $\forall x\, (R(x) \vee S(x)) \to (\forall x\, R(x) \vee \forall x\, S(x))$;

    (b) $(\forall x\, R(x) \vee \forall x\, S(x)) \to \forall x\, (R(x) \vee S(x))$.

97. Zbadać, czy następujące formuły są tautologiami:

    (a) $\exists x (P(x) \to \forall y Q(y)) \to \exists x \forall y (P(x) \to Q(y))$;

    (b) $\exists x (\forall y Q(y) \to P(x)) \to \exists x \forall y (Q(y) \to P(x))$;

    (c) $\exists x (\forall y Q(y) \to P(x)) \to \exists x (Q(x) \to P(x))$.

    Rozwiązanie: (a) Tak. Wynika to z następujących równoważności:

    - $\models \exists x (P(x) \to \forall y Q(y)) \leftrightarrow \exists x (\neg P(x) \vee \forall y Q(y))$;
    - $\models \exists x (\neg P(x) \vee \forall y Q(y)) \leftrightarrow \exists x \forall y (\neg P(x) \vee Q(y))$ (bo y nie jest wolne w $\neg P(x)$);
    - $\models \exists x \forall y (\neg P(x) \vee Q(y)) \leftrightarrow \exists x \forall y (P(x) \to Q(y))$.

    (b) Nie. Kontrprzykładem jest model $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, P^{\mathcal{A}}, Q^{\mathcal{A}} \rangle$, w którym $P^{\mathcal{A}} = \emptyset$ oraz $Q^{\mathcal{A}} = \{2, 3, 5, 7\}$. Wtedy $\mathcal{A} \not\models \forall y Q(y)$, bo $Q^{\mathcal{A}} \neq \mathbb{N}$, a zatem $\mathcal{A}, \{x \mapsto 4\} \models \forall y Q(y) \to P(x)$. Stąd $\mathcal{A} \models \exists x (\forall y Q(y) \to P(x))$.

    Tymczasem, jakie by nie było $a \in \mathbb{N}$, zawsze $\mathcal{A}, \{x \mapsto a, y \mapsto 5\} \not\models Q(y) \to P(x)$. Dlatego $\mathcal{A}, \{x \mapsto a\} \not\models \forall y (Q(y) \to P(x))$ i ostatecznie $\mathcal{A} \not\models \exists x \forall y (Q(y) \to P(x))$.

    (c) Tak. Rozpatrzmy dowolny model $\mathcal{A} = \langle A, P^{\mathcal{A}}, Q^{\mathcal{A}} \rangle$. Jeśli $\mathcal{A} \not\models \exists x (\forall y Q(y) \to P(x))$, to oczywiście $\mathcal{A} \models \exists x (\forall y Q(y) \to P(x)) \to \exists x (Q(x) \to P(x))$. Przypuśćmy więc, że $\mathcal{A} \models \exists x (\forall y Q(y) \to P(x))$. Oznacza to, że $\mathcal{A}, \{x \mapsto a\} \models \forall y Q(y) \to P(x)$, dla pewnego $a \in A$. Mamy więc dwa przypadki.

    Pierwszy przypadek zachodzi wtedy, gdy $\mathcal{A}, \{x \mapsto a\} \models P(x)$, czyli gdy $a \in P^{\mathcal{A}}$. Wtedy $\mathcal{A}, \{x \mapsto a\} \models Q(x) \to P(x)$, a zatem $\mathcal{A} \models \exists x (Q(x) \to P(x))$.

    Drugi przypadek zachodzi wtedy, gdy $\mathcal{A}, \not\models \forall y Q(y)$, czyli gdy $Q^{\mathcal{A}} \neq A$. Jest więc takie $b \in A$, że $\mathcal{A}, \{x \mapsto b\} \not\models Q(x)$. Stąd mamy $\mathcal{A}, \{x \mapsto b\} \models Q(x) \to P(x)$, więc także $\mathcal{A} \models \exists x (Q(x) \to P(x))$.

98. Zbadać, czy następujące formuły są tautologiami:

    (a) $\forall x \exists y (P(x) \to R(x, y)) \to \forall x (P(x) \to \exists y R(x, y))$;

    (b) $\forall x \exists y (R(x, y) \to P(x)) \to \forall x (\exists y R(x, y) \to P(x))$.

99. Która z następujących implikacji jest tautologią:

a) $[\forall x \exists y R(x,y) \to \exists x \forall y R(y,x)] \to \exists x \forall y (R(x,y) \to R(y,x))$?
b) $[\forall x \exists y R(x,y) \to \exists x \forall y R(y,x)]$?

Rozwiązanie: (a) Lewa strona implikacji jest równoważna formułom:

- $\neg \forall x \exists y R(x,y) \vee \exists x \forall y R(y,x)$;
- $\exists x \forall y \neg R(x,y) \vee \exists x \forall y R(y,x)$;
- $\exists x (\forall y \neg R(x,y) \vee \forall y R(y,x))$;
- $\exists x (\forall y \neg R(x,y) \vee \forall z R(z,x))$;
- $\exists x \forall y (\neg R(x,y) \vee \forall z R(z,x))$;
- $\exists x \forall y \forall z (\neg R(x,y) \vee R(z,x))$.

Prawa strona jest równoważna formule $\exists x \forall y (\neg R(x,y) \vee R(y,x))$. Pozostaje więc zauważyć, że:

- Każda formuła postaci $\forall y \forall z\, \varphi(y,z) \to \forall y\, \varphi(y,y)$ jest tautologią;
- Jeśli $\varphi \to \psi$ jest tautologią, to także $\exists x\, \varphi \to \exists x\, \psi$ jest tautologią.

(b) Rozwiązanie zadania ułatwi przekształcenie formuły do równoważnej postaci $\exists x \forall y (\neg R(x,y) \vee R(y,x)) \to \exists x \forall y \neg R(x,y) \vee \exists x \forall y R(y,x)$. Teraz łatwo sprawdzić, że ta formuła nie jest prawdziwa w modelu $\langle \mathbb{R}, = \rangle$. Mamy bowiem na przykład $\mathbb{R}, \{0/x\} \models \forall y (\neg R(x,y) \vee R(y,x))$, bo dla dowolnej liczby y albo $0 \neq y$ albo $y = 0$. A więc $\mathbb{R} \models \exists x \forall y (\neg R(x,y) \vee R(y,x))$. Ale nie ma ani liczby równej wszystkim, ani liczby różnej od wszystkich liczb rzeczywistych, więc $\mathbb{R} \not\models \exists x \forall y \neg R(x,y) \vee \exists x \forall y R(y,x)$.

100. Sygnatura Σ składa się z symboli $P, Q \in \Sigma_1^R$ i $R \in \Sigma_2^R$.

(a) Wykazać, że formuła „$\forall y (\exists x R(x,y) \to R(y,y)) \to \forall y R(y,y)$" jest spełnialna i nie jest tautologią;
(b) Wykazać, że formuła „$(\forall y P(y) \to Q(x)) \to \exists y (P(y) \to Q(x))$" jest tautologią.

101. Które z następujących formuł są spełnialne i które są tautologiami? (P i Q są jednoargumentowymi symbolami relacyjnymi a f jest jednoargumentowym symbolem funkcyjnym.)

(a) $\exists x \exists y (Q(x) \to P(y)) \to (\forall x Q(x) \to \exists y P(y))$;
(b) $(\forall x Q(x) \to \exists y P(y)) \to \forall x (Q(x) \to P(x))$;
(c) $\forall x \exists y (f(y) = x) \to \forall x \forall y (f(x) = f(y) \to x = y)$?

102. Które z następujących formuł są spełnialne i które są tautologiami?

(a) $\forall x \exists y (R(x,y) \vee \forall z \neg R(x,z))$;
(b) $\forall x ((P(x) \to P(y)) \to Q) \to Q$;
(c) $\exists x \exists y (P(x) \to Q(y)) \to \exists x (P(x) \to Q(x))$;
(d) $\exists x (P(x) \to \forall x P(x))$;
(e) $\forall x \exists y \forall z \exists u S(x,y,z,u) \to \forall z \exists u \forall x \exists y S(x,y,z,u)$.

103. Pokazać, że formuła $\forall x \exists y\, (R(x,y) \to P(x,y)) \to \forall x\, (\exists y\, R(x,y) \to \exists y\, P(x,y))$ jest spełnialna, ale nie jest tautologią.

104. Czy formuła „$(\forall x \exists y Q(x,y) \to \forall x P(x)) \to \forall x \exists y (Q(x,y) \to P(x))$" jest tautologią? A implikacja odwrotna?

105. Niech f będzie jednoargumentowym symbolem funkcyjnym, który nie występuje w formule φ. Pokazać, że formuła $\forall x \exists y \varphi$ jest spełnialna wtedy i tylko wtedy gdy formuła $\forall x \varphi[f(x)/y]$ jest spełnialna.

106. Które z następujących zdań są spełnialne i które są tautologiami? (P i Q są jednoargumentowymi symbolami relacyjnymi a f jest jednoargumentowym symbolem funkcyjnym.)

(a) $\exists x (Q(x) \to P(x)) \to (\forall x Q(x) \to \exists y P(y))$;
(b) $\forall x (P(x) \to P(f(x))) \to \forall x P(f(x))$;
(c) $\forall x P(f(x)) \to \forall x P(x)$?

107. Które z następujących zdań są spełnialne i które są tautologiami? (R jest dwuargumentowym symbolem relacyjnym a f jest jednoargumentowym symbolem funkcyjnym.)

(a) $\forall xyz (R(x,y) \vee R(y,z) \vee R(z,x)) \to \forall xy (R(x,y) \vee R(y,x))$;
(b) $\forall xy (R(x,y) \vee R(y,x)) \to \forall xyz (R(x,y) \vee R(y,z) \vee R(z,x))$;
(c) $\forall xyz (R(x,y) \vee R(y,z) \vee R(z,x)) \to \forall xy \exists z (R(x,z) \vee R(z,y))$?

108. Czy następujące formuły są tautologiami i czy są spełnialne?

(a) $\exists x \exists y (P(x) \to Q(y)) \to \exists x (P(x) \to Q(x))$;
(b) $\forall x \exists y \forall z (R(x,y) \wedge (R(y,z) \to R(x,z))$?

109. Która z następujących implikacji jest tautologią, a która nie?

(a) $\forall x \exists y ((P(x) \to Q(y)) \to R(y)) \to ((\forall x P(x) \to \forall y Q(y)) \to \exists y R(y))$;
(b) $\forall x \exists y ((P(x) \to Q(y)) \to R(y)) \to ((\forall x P(x) \to \exists y Q(y)) \to \exists y R(y))$.

Rozwiązanie: Pierwsza implikacja jest tautologią. Wystarczy w tym celu zauważyć równoważność następujących formuł:

$$\begin{array}{ll}
(\forall x P(x) \to \forall y Q(y)) \to \exists y R(y); & \\
\neg(\forall x P(x) \to \forall y Q(y)) \vee \exists y R(y); & \\
(\forall x P(x) \wedge \neg\forall y Q(y)) \vee \exists y R(y); & \\
(\forall x P(x) \wedge \exists y \neg Q(y)) \vee \exists y R(y); & \\
\forall x(P(x) \wedge \exists y \neg Q(y)) \vee \exists y R(y); & \\
\forall x((P(x) \wedge \exists y \neg Q(y)) \vee \exists y R(y)), & \text{bo } x \notin FV(\exists y R(y)); \\
\forall x(\exists y(P(x) \wedge \neg Q(y)) \vee \exists y R(y)), & \text{bo } y \notin FV(P(x)); \\
\forall x \exists y((P(x) \wedge \neg Q(y)) \vee \exists y R(y)); & \\
\forall x \exists y(\neg(P(x) \to Q(y)) \vee \exists y R(y)); & \\
\forall x \exists y((P(x) \to Q(y)) \to \exists y R(y)). &
\end{array}$$

Druga implikacja nie jest prawdziwa w modelu $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, P^{\mathcal{A}}, Q^{\mathcal{A}}, R^{\mathcal{A}} \rangle$, gdzie $P^{\mathcal{A}} = \mathbb{N}$, $Q^{\mathcal{A}} = \{2, 3\}$ i $R^{\mathcal{A}} = \emptyset$. Mamy bowiem $\mathcal{A}, \{n/x, 4/y\} \not\models P(x) \to Q(y)$ dla dowolnej liczby n. Stąd $\mathcal{A} \models \forall x \exists y((P(x) \to Q(y)) \to R(y))$. Ponieważ $Q^{\mathcal{A}} \neq \emptyset$, więc $\mathcal{A} \models \forall x P(x) \to \exists y Q(y)$, ale $\mathcal{A} \not\models \exists y R(y))$. A więc formuła (b) nie jest tautologią.

110. Która z następujących implikacji jest tautologią, a która nie?

(a) $\forall x(P(x) \to \exists y Q(y)) \to \exists y(\exists x P(x) \to Q(y))$;

(b) $\exists y(\forall x P(x) \to Q(y)) \to \forall x(P(x) \to \exists y Q(y))$.

Rozwiązanie: (a) Tak. Zauważmy, że przesłanka implikacji jest równoważna zdaniu $\forall x(\neg P(x) \vee \exists y Q(y))$. Ponieważ x nie jest wolne w $\exists y Q(y)$, to zdanie jest równoważne $\forall x \neg P(x) \vee \exists y Q(y)$, a zatem zdaniu $\neg\exists x P(x) \vee \exists y Q(y)$. Ale y nie jest wolne w $\neg\exists x P(x)$, więc nasze zdanie jest równoważne formule $\exists y(\neg\exists x P(x) \vee Q(y))$. A to jest równoważne konkluzji naszej implikacji.

Drugi sposób: Rozpatrzmy dowolny model $\mathcal{A} = \langle A, P^{\mathcal{A}}, Q^{\mathcal{A}} \rangle$. Jeśli przesłanka implikacji jest fałszywa w $\mathcal{A}$, to całość jest prawdziwa, załóżmy więc, że $\mathcal{A} \models \forall x(P(x) \to \exists y Q(y))$. Jeżeli teraz zbiór $P^{\mathcal{A}}$ jest niepusty, np. $a \in P^{\mathcal{A}}$, to mamy $\mathcal{A}, a \models P(x)$ oraz $\mathcal{A}, a \models P(x) \to \exists y Q(y)$. Stąd wnioskujemy $\mathcal{A} \models \exists y Q(y)$, czyli mamy takie $b \in A$, że $\mathcal{A}, b \models Q(y)$. Tym bardziej $\mathcal{A}, b \models \exists x P(x) \to Q(y)$, więc ostatecznie $\mathcal{A} \models \exists y(\exists x P(x) \to Q(y))$.

Przypuśćmy więc, że $P^{\mathcal{A}} = \emptyset$, czyli $\mathcal{A} \not\models \exists x P(x)$. Weźmy jakiekolwiek $b \in A$. Wtedy $\mathcal{A}, b \models \exists x P(x) \to Q(y)$, skąd $\mathcal{A} \models \exists y(\exists x P(x) \to Q(y))$.

(b) Nie. Weźmy $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, P^{\mathcal{A}}, Q^{\mathcal{A}} \rangle$, gdzie $P^{\mathcal{A}} = \{11\}$ i $Q^{\mathcal{A}} = \emptyset$. Wtedy $\mathcal{A} \not\models \forall x P(x)$, więc mamy np. $\mathcal{A}, 5 \models \forall x P(x) \to Q(y)$. Zatem przesłanka implikacji jest prawdziwa w $\mathcal{A}$. Natomiast $\mathcal{A}, 11 \not\models P(x) \to \exists y Q(y)$, więc konkluzja jest fałszywa.

111. Zbadać spełnialność formuł:

   (a) $\forall x \forall y(\neg x = y \rightarrow \exists z(P(x,z) \wedge P(y,z)))$;
   (b) $\forall x \exists y \exists z(\neg y = z \wedge P(x,y) \wedge P(x,z))$.

112. Formuła φ jest *w postaci normalnej*, jeżeli $\varphi = Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n . \psi$, gdzie $Q_1 \ldots Q_n$ jest pewnym ciągiem kwantyfikatorów, a ψ jest formułą otwartą.

   (a) Sprowadzić do postaci normalnej formułę $\forall x Q(x) \rightarrow \exists x P(x)$.
   (b) Udowodnić, że dla każdej formuły istnieje równoważna formuła w postaci normalnej.

113. Czy jeśli $\mathcal{A} \models \exists x\, \varphi$, to także $\mathcal{A} \models \varphi[t/x]$, dla pewnego termu t?

114. Podać przykład nieskończonego zbioru parami nierównoważnych formuł, w których występują tylko 2 zmienne (w tym związane) i jeden unarny symbol funkcyjny.

115. Czy formuła $\forall x \exists y \forall z(R(z,y) \Leftrightarrow z = x) \wedge \neg\, \exists y R(y,x)$ ma skończony model?

116. Czy formuła $\neg \forall y P(y) \,\wedge\, \forall x \exists y(P(y) \,\wedge\, x = f(y))$ ma skończony model?

117. Pokazać, że jeśli dla dowolnej formuły φ i dowolnego wartościowania ρ warunek $\mathcal{A}, \rho \models \varphi[t_1/x]$ zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy warunek $\mathcal{A}, \rho \models \varphi[t_2/x]$, to $\mathcal{A} \models t_1 = t_2$.

Teoria modeli

118. Udowodnić, że dla dowolnego zbioru formuł Σ i dowolnej formuły φ istnieje taka formuła σ, że $\Sigma \models \varphi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\sigma \rightarrow \varphi$ jest tautologią.

119. Czy istnieje zdanie prawdziwe w $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ ale nie w $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$?

120. Czy istnieje sprzeczny zbiór formuł logiki pierwszego rzędu, taki że każdy jego właściwy podzbiór jest niesprzeczny?

121. Jesli suma teorii $T_1 \cup T_2$ jest sprzeczna, to istnieje takie zdanie ψ, że $T_1 \vdash \psi$ oraz $T_2 \vdash \neg\psi$.

122. Przypuśćmy, że każde zdanie φ_i, gdzie $i \in \mathbb{N}$ (sygnatura składa się z jednego binarnego symbolu relacyjnego) ma tylko skończenie wiele parami nieizomorficznych modeli. Pokazać, że istnieje model w którym żadne φ_i nie jest prawdziwe.

123. Przypuśćmy, że w każdym modelu zbioru zdań T prawdziwe jest choć jedno ze zdań φ_i, gdzie $i \in \mathbb{N}$. Udowodnić, że wtedy $T \models \varphi_0 \vee \cdots \vee \varphi_k$, dla pewnego k.

124. Udowodnić, że klasa ciał algebraicznie domkniętych nie jest skończenie aksjomatyzowalna.

125. Czy dla każdej niesprzecznej teorii T istnieje taka teoria T', że $T \subseteq T'$ oraz

a) T' jest zupełna? b) $\aleph_0$-kategoryczna?

126. Niech φ będzie zdaniem pewnej sygnatury pierwszego rzędu, takim że $\nvdash \varphi$ oraz $\nvdash \neg\varphi$. Udowodnić, że istnieje teoria T, spełniająca warunki:

- $T \nvdash \varphi$ oraz $T \nvdash \neg\varphi$;
- jeśli $T \subsetneq T'$ to albo $T' \vdash \varphi$ albo $T' \vdash \neg\varphi$.

127. Zbiór zdań Γ (w przeliczalnym języku) ma taką własność, że każde dwa jego przeliczalne modele są izomorficzne. Udowodnić, że dla dowolnego zdania φ zachodzi $\Gamma \vdash \varphi$ lub $\Gamma \vdash \neg\varphi$.

Rozwiązanie: W przeciwnym razie zbiory $\Gamma \cup \{\varphi\}$ i $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ byłyby niesprzeczne, a więc spełnialne, i to w modelach przeliczalnych (na mocy dolnego tw. Skolema-Löwenheima). Ale takie modele nie mogłyby być izomorficzne.

128.* Udowodnić, że każde zdanie prawdziwe w $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$ jest także prawdziwe w $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$.

Rozwiązanie: Z teorii mnogości wiadomo, że każde dwa przeliczalne porządki gęste bez końców są izomorficzne. Rozpatrzmy zbiór Γ złożony z pięciu aksjomatów definiujących porządek gęsty bez końców (zwrotność, przechodniość, antysymetria, gęstość, brak elementu pierwszego i ostatniego). Zarówno $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$ jak i $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ są modelami tych aksjomatów. Ponadto zbiór Γ spełnia warunki zadania 127. A zatem dla dowolnego zdania φ albo $\Gamma \models \varphi$ albo $\Gamma \models \neg\varphi$. Przypuśćmy teraz, że $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle \models \varphi$. Ponieważ $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle \models \Gamma$ więc przypadek $\Gamma \models \neg\varphi$ jest niemożliwy, a więc $\Gamma \models \varphi$, w szczególności $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle \models \varphi$.

Dowodzenie twierdzeń

129. Wyprowadzić (bez cięcia) następujące sekwenty:

(a) $p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$;

(b) $\forall x(P(y) \vee Q(x)) \vdash P(y) \vee \forall x Q(x)$.

Rozwiązanie[6] (a)

$$
\text{(LK)}\dfrac{\text{(LK)}\dfrac{\text{(LA)}\dfrac{\text{(PA)}\dfrac{\text{(PK)}\dfrac{\text{(LO)}\dfrac{p \vdash p}{p, q \vdash p} \quad \text{(LO)}\dfrac{q \vdash q}{p, q \vdash q}}{p, q \vdash p \wedge q}}{p, q \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)} \qquad \text{(PA)}\dfrac{\text{(PK)}\dfrac{\text{(LO)}\dfrac{p \vdash p}{p, r \vdash p} \quad \text{(LO)}\dfrac{r \vdash r}{p, r \vdash r}}{p, r \vdash p \wedge r}}{p, r \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)}}{p, (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)}}{p, p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)}}{p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)}
$$

Rozwiązanie (b)

$$
\text{(PA)}\dfrac{\text{(PA)}\dfrac{\text{(P}\forall\text{)}\dfrac{\text{(L}\forall\text{)}\dfrac{\text{(LA)}\dfrac{\text{(PO)}\dfrac{P(y) \vdash P(y)}{P(y) \vdash P(y), Q(x)} \quad \text{(PO)}\dfrac{Q(x) \vdash Q(x)}{Q(x) \vdash P(y), Q(x)}}{P(y) \vee Q(x) \vdash P(y), Q(x)}}{\forall x(P(y) \vee Q(x)) \vdash P(y), Q(x)}}{\forall x(P(y) \vee Q(x)) \vdash P(y), \forall x Q(x)}}{\forall x(P(y) \vee Q(x)) \vdash P(y), P(y) \vee \forall x Q(x)}}{\forall x(P(y) \vee Q(x)) \vdash P(y) \vee \forall x Q(x)}
$$

130. Wyprowadzić (bez cięcia) następujące sekwenty:

   (a) $\vdash (p \to (q \to r)) \to (p \wedge q \to r)$;

   (b) $\vdash \forall x(P(x) \to Q(y)) \to (\exists x P(x) \to Q(y))$.

131. Skonstruować w rachunku sekwentów dowód formuły:

   (a) $\neg(p \to p \wedge q) \to (q \to p \wedge q)$.

   (b) $(p \vee q) \wedge (p \vee r) \to p \vee (q \wedge r)$.

132. Skonstruować w rachunku sekwentów dowód formuły:

   (a) $\exists x(P(x) \to \forall x P(x))$;

   (b) $(\forall y P(y) \to Q(x)) \to \exists y(P(y) \to Q(x))$.

133. Wyprowadzić w rachunku sekwentów:

   (a) $\vdash (p \to q \vee r) \to ((p \to q) \vee (p \to r))$;

[6] Uwaga: Wszystkie dowody są zapisane w sposób skrótowy, z pominięciem kroków strukturalnych (skracanie, wymiana). Sekwenty są traktowane jak pary zbiorów, nie jak pary ciągów.

(b) $\vdash (p \to \neg q) \to \neg(p \wedge q)$.

Rozwiązanie (a)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \vdash p}{p \vdash p, q}}{\vdash p, p \to q}}{\vdash p, (p \to q) \vee (p \to r)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{q \vdash q}{p, q \vdash q}}{q \vdash p \to q}}{q \vdash (p \to q) \vee (p \to r)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{r \vdash r}{p, r \vdash r}}{r \vdash p \to r}}{r \vdash (p \to q) \vee (p \to r)}}{q \vee r \vdash (p \to q) \vee (p \to r)}}{\dfrac{p \to q \vee r \vdash (p \to q) \vee (p \to r)}{\vdash (p \to q \vee r) \to ((p \to q) \vee (p \to r))}}$$

(b)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \vdash p}{p \wedge q \vdash p} \qquad \dfrac{\dfrac{q \vdash q}{p \wedge q \vdash q}}{p \wedge q, \neg q \vdash}}{p \to \neg q, p \wedge q \vdash}}{p \to \neg q \vdash \neg(p \wedge q)}}{\vdash (p \to \neg q) \to \neg(p \wedge q)}$$

134. Wyprowadzić w rachunku sekwentów:

(a) $\vdash \exists x(P(x) \to Q) \vee \forall x P(x)$;

(b) $\forall x(P(x) \to P(f(x))) \vdash \exists x P(x) \to \exists x P(f(f(x)))$.

Rozwiązanie (a)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(x) \vdash P(x)}{P(x) \vdash P(x), Q}}{\vdash P(x), P(x) \to Q}}{\vdash P(x), \exists x(P(x) \to Q)}}{\vdash \forall x P(x), \exists x(P(x) \to Q)}}{\vdash \forall x P(x), \exists x(P(x) \to Q) \vee \forall x P(x)}}{\vdash \exists x(P(x) \to Q) \vee \forall x P(x)}$$

(b) Formułę $\forall x(P(x){\to}P(f(x)))$ zastąpiono poniżej znakiem Φ.

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{P(x)\vdash P(x)}{P(x)\vdash P(x),P(f(x))}\qquad \dfrac{P(f(x))\vdash P(f(x))}{P(f(x)),P(x)\vdash P(f(x))}}{\dfrac{P(x){\to}P(f(x)),P(x)\vdash P(f(x))}{\dfrac{\Phi,P(x)\vdash P(f(x))}{\Phi,P(x)\vdash P(f(x)),P(f(f(x)))}}}
\qquad
\dfrac{\dfrac{P(f(f(x)))\vdash P(f(f(x)))}{P(f(f(x))),P(x)\vdash P(f(f(x)))}}{P(f(f(x))),\Phi,P(x)\vdash P(f(f(x)))}
}{\Phi,P(f(x)){\to}P(f(f(x))),P(x)\vdash P(f(f(x)))}
}{
\dfrac{\Phi,P(x)\vdash P(f(f(x)))}{\dfrac{\Phi,P(x)\vdash \exists xP(f(f(x)))}{\dfrac{\Phi,\exists xP(x)\vdash \exists xP(f(f(x)))}{\Phi\vdash \exists xP(x){\to}\exists xP(f(f(x)))}}}
}
$$

135. Wyprowadzić w rachunku sekwentów:

(a) $\vdash (p \vee (p \to q) \to q) \to q$;

(b) $\vdash (p \to q) \wedge (\neg p \to q) \to q$.

136. Wyprowadzić w rachunku sekwentów:

(a) $\vdash ((p \wedge q) \to r) \to (p \to r) \vee (q \to r)$;

(b) $\vdash ((p \to q) \wedge \neg q) \to \neg p$.

Rozwiązanie (a)

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p\vdash p}{p\vdash p,r}}{\vdash p,p\to r}}{\vdash p,p\to r,q\to r}\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{q\vdash q}{q\vdash q,r}}{\vdash q,q\to r}}{\vdash q,p\to r,q\to r}}{\dfrac{\vdash p\wedge q,p\to r,q\to r}{\dfrac{\vdash p\wedge q,p\to r,(p\to r)\vee(q\to r)}{\vdash p\wedge q,(p\to r)\vee(q\to r)}}}
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{r\vdash r}{p,r\vdash r}}{r\vdash p\to r}}{r\vdash (p\to r)\vee(q\to r)}
}{(p\wedge q)\to r\vdash (p\to r)\vee(q\to r)}
}{\vdash ((p\wedge q)\to r)\to (p\to r)\vee(q\to r)}
$$

(b)

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \vdash p}{\vdash p, \neg p}}{\neg q \vdash p, \neg p} \qquad \dfrac{\dfrac{q \vdash q}{\neg q, q \vdash}}{\neg q, q \vdash \neg p}}{p \to q, \neg q \vdash \neg p}}{p \to q, (p \to q) \wedge \neg q \vdash \neg p}}{(p \to q) \wedge \neg q \vdash \neg p}}{\vdash ((p \to q) \wedge \neg q) \to \neg p}
$$

137. Wyprowadzić (bez cięcia) sekwent

$$\forall xyz(P(x,y) \wedge P(y,z) \to P(x,z)) \vdash \forall u(P(u,f(u)) \to P(u,f^2(u)).$$

138. Wyprowadzić w rachunku sekwentów:

(a) $\vdash \exists x \forall y(\neg R(x) \vee R(y)).$;

(b) $\forall x(R(f(x)) \to R(x)) \vdash \forall x R(f^2(x)) \to \forall x R(x)$.

Rozwiązanie (a)

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash R(z), \neg R(z)}{\vdash R(z), \neg R(z) \vee R(y)}}{\vdash R(z), \forall y(\neg R(z) \vee R(y))}}{\vdash R(z), \exists x \forall y(\neg R(x) \vee R(y))}}{\vdash \neg R(x) \vee R(z), \exists x \forall y(\neg R(x) \vee R(y))}}{\vdash \forall y(\neg R(x) \vee R(y)), \exists x \forall y(\neg R(x) \vee R(y))}}{\vdash \exists x \forall y(\neg R(x) \vee R(y))}
$$

Rozwiązanie (b) Formułę $\forall x(R(f(x)) \to R(x))$ zastąpiono poniżej znakiem Φ.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{R(f^2(x)) \vdash R(f^2(x))}{R(f^2(x)) \vdash R(f(x)), R(f^2(x))} \qquad \dfrac{R(f(x)) \vdash R(f(x))}{R(f^2(x)), R(f(x)) \vdash R(f(x))}}{R(f^2(x)) \to R(f(x)), R(f^2(x)) \vdash R(f(x))}}{\Phi, R(f^2(x)) \vdash R(f(x))}}{\Phi, R(f^2(x)) \vdash R(x), R(f(x))} \qquad \dfrac{\dfrac{R(x) \vdash R(x)}{R(f^2(x)), R(x) \vdash R(x)}}{\Phi, R(f^2(x)), R(x) \vdash R(x)}}{\Phi, R(f(x)) \to R(x), R(f^2(x)) \vdash R(x)}}{\Phi, R(f^2(x)) \vdash R(x)}}{\Phi, \forall x R(f^2(x)) \vdash R(x)}}{\Phi, \forall x R(f^2(x)) \vdash \forall x R(x)}}{\Phi \vdash \forall x R(f^2(x)) \to \forall x R(x)}
$$

139. Wykazać, że następujące formuły nie mają dowodu w rachunku sekwentów:

(a) $(p \to q) \to (q \to p)$;

(b) $(p \to q) \to ((p \to r) \to (q \to r))$.

140. Skonstruować w rachunku sekwentów dowody formuł

a) $(\neg p \to \neg q) \to ((\neg p \to q) \to p)$;

b) $\neg(p \to q) \land \neg(q \to r) \to (p \to r)$.

Rozwiązanie (a)

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \vdash p}{\vdash \neg p, p}}{\neg p \to \neg q \vdash \neg p, p} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{p \vdash p}{\vdash \neg p, p}}{q \vdash \neg p, p} \qquad \dfrac{\dfrac{q \vdash q}{q, \neg q \vdash}}{q, \neg q \vdash p}}{\neg p \to \neg q, q \vdash p}}{\neg p \to \neg q, \neg p \to q \vdash p}}{\neg p \to \neg q \vdash (\neg p \to q) \to p}}{\vdash (\neg p \to \neg q) \to ((\neg p \to q) \to p)}
$$

Rozwiązanie (b)

$$
\begin{array}{c}
q \vdash q \\ \hline
q \vdash p \to r, q \\ \hline
q \vdash q, p \to r \\ \hline
q \vdash r, q, p \to r \\ \hline
\vdash q \to r, q, p \to r \\ \hline
p \vdash q \to r, q, p \to r \\ \hline
p \vdash q, q \to r, p \to r \\ \hline
\vdash p \to q, q \to r, p \to r \\ \hline
\neg(p \to q) \vdash q \to r, p \to r \\ \hline
\neg(p \to q), \neg(q \to r) \vdash p \to r \\ \hline
\neg(p \to q), \neg(p \to q) \land \neg(q \to r) \vdash p \to r \\ \hline
\neg(p \to q) \land \neg(q \to r), \neg(p \to q) \vdash p \to r \\ \hline
\neg(p \to q) \land \neg(q \to r), \neg(p \to q) \land \neg(q \to r) \vdash p \to r \\ \hline
\neg(p \to q) \land \neg(q \to r) \vdash p \to r \\ \hline
\neg(p \to q) \land \neg(q \to r) \to (p \to r)
\end{array}
$$