ZADANIE 4. (Ćwiczenia)

Dany jest ciąg liczb rzeczywistych

$$a_0,\ a_1,\ \cdots, a_n,\ \ a_n \neq 0, \tag{1}$$

oraz drugi ciąg liczb rzeczywistych

$$z_0,\ z_1\ \ \cdots, z_{n-1}. \tag{2}$$

O ciągu (1) wiadomo, że wielomian $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ ma pierwiastki $\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_n$, takie że

$$|\xi_1| < |\xi_2| < \cdots < |\xi_n|.$$

Tworzymy ciąg nieskończony $\{z_k\}_{k=0,1,2,\cdots}$ w następujący sposób:

$$z_n = -\frac{1}{a_n}(a_0z_0 + a_1z_1 + \cdots\cdots + a_{n-1}z_{n-1}),$$

$$z_{n+1} = -\frac{1}{a_n}(a_0z_1 + a_1z_2 + \cdots\cdots\cdots + a_nz_n),$$

$$z_{n+2} = -\frac{1}{a_n}(a_0z_2 + a_1z_3 + \cdots + a_nz_{n+1}),\ \text{itd.}$$

Niech $\mathcal{A}$ bedzie przestrzenią, której elementami są wszystkie ciągi

$$\zeta = \{z_0, z_1, \cdots\}$$

utworzone w opisany sposób dla ustalonego ciągu (1) i dla wszystkich możliwych ciagów (2).

1. Udowodnij, że przestrzeń $\mathcal{A}$ jest liniowa i skończonego wymiaru. Podaj wymiar tej przestrzeni, wskaż bazę.

2. Udowodnij, że istniają takie stałe $C_1, \cdots, C_n$ że każdy element z_k ciągu $\zeta = \{z_0,\ z_1, \cdots\}$ może być jednoznacznie przedstawiony jako

   $$z_k = C_1\xi_1^k + \cdots + C_n\xi_n^k.$$

   Jaka rolę w przestrzeni $\mathcal{A}$ odgrywają ciągi postaci $\{1, \xi_j, \xi_j^2, \cdots\}$?

3. Zbadaj do czego i przy jakich warunkach dąży ciąg o wyrazach

   $$u_n = \frac{z_n}{z_{n_{n-1},}}$$

   gdy $n \to \infty$.