WYKŁAD 5.

UKŁADY RÓWNAŃ LINIOWYCH Z MACIERZĄ TRÓJDIAGONALNĄ

Opiszemy tu pewien wariant realizacji metody **DIVIDE AND CONQUER**. Będzie to nam potrzebne przy dalszych naszych zmaganiach z równaniami różniczkowymi.

Niech macierz układu będzie postaci:

$$\begin{bmatrix} d_0 & b_0 & & & & & \\ a_1 & d_1 & b_1 & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & & a_M & d_M \end{bmatrix} \tag{5.1}$$

Tak jak poprzednio, przyjmiemy dla uproszczenia zapisu, że liczba procesorów $lp = 5$ i zapiszemy układ w postaci blokowej: każdy wiersz blokowy odpowiada jednemu procesorowi:

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c|c} D_0 & B_0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline A_1 & D_1 & B_1 & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & A_2 & D_2 & B_2 & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & A_3 & D_3 & B_3 \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & A_4 & D_4 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \underline{X_0} \\ \underline{X_1} \\ \underline{X_2} \\ \underline{X_3} \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{F_0} \\ \underline{F_1} \\ \underline{F_2} \\ \underline{F_3} \\ F_4 \end{bmatrix}.$$

Zakładamy, że bloki A_s, D_s i B_s są wymiaru $R+1 \times R+1$ i że wiersze i kolumny w blokach są numerowane od 0 do R; wtedy $M = lp(R+1) - 1$.

Mnożymy wiersze przez odpowiednie macierze D_s^{-1}; otrzymamy:

$$\begin{aligned} X_0 &= \tilde{X}_0 - D_0^{-1}B_0X_1 \\ X_1 &= \tilde{X}_1 - D_1^{-1}A_1X_0 - D_1^{-1}B_1X_2 \\ X_2 &= \tilde{X}_2 - D_2^{-1}A_2X_1 - D_2^{-1}B_2X_3 \\ X_3 &= \tilde{X}_3 - D_3^{-1}A_3X_2 - D_3^{-1}B_3X_4 \\ X_4 &= \tilde{X}_4 - D_4^{-1}A_4X_3 \end{aligned} \tag{5.2}$$

gdzie $\tilde{\boldsymbol{X}}_s$ oznacza $\boldsymbol{D}_s^{-1}\boldsymbol{F}_s$, (pierwsze przybliżenie części rozwiązania układu w procesorze nr. $\boldsymbol{s}$), zaś $\boldsymbol{D}_s^{-1}\boldsymbol{A}_s\boldsymbol{X}_{s-1}$ i $\boldsymbol{D}_s^{-1}\boldsymbol{B}_s\boldsymbol{X}_{s+1}$, to poprawki.

Mamy:

$$\boldsymbol{A}_s = \boldsymbol{a}_{s(R+1)}\boldsymbol{e}_0\boldsymbol{e}_R^T,$$
$$\boldsymbol{B}_s = \boldsymbol{b}_{(s+1)R+s}\boldsymbol{e}_R\boldsymbol{e}_0^T,$$

gdzie $\boldsymbol{e}_0$ i $\boldsymbol{e}_R$, to zerowy i $\boldsymbol{R}$-ty kolumnowy wersor osi $\mathbf{0}$ i $\boldsymbol{R}$.

Dla wyznaczenia poprawek zbudujemy **UKŁAD SCHURA** który teraz będzie trójdiagonalny, wymiaru $\mathbf{2}(\boldsymbol{lp}-\mathbf{1})$, to znaczy dla $\boldsymbol{lp}=\mathbf{5}$, układ Schura będzie miał wymiar $\mathbf{8}\times\mathbf{8}$, a jego równania będą ponumerowane $\mathbf{0,1,2,3,4,5,6,7}$. Teraz sytuacja jest troche bardziej skomplikowana niż w przypadku układu dwudiagonalnego. Musimy ponumerować zmienne układu Schura, pooznaczać jego współczynniki, oraz ponumerowwć jego równania. Bez zmniejszenia ogólności zrobimy to dla przypadku $\boldsymbol{lp}=\mathbf{5}$.

ALGORYTM NUMERACYJNY
ZMIENNE

- ZMIENNE PARZYSTE:

$$\boldsymbol{Z}_0 = \boldsymbol{e}_0^T\boldsymbol{X}_1$$
$$\boldsymbol{Z}_2 = \boldsymbol{e}_0^T\boldsymbol{X}_2$$
$$\boldsymbol{Z}_4 = \boldsymbol{e}_0^T\boldsymbol{X}_3$$
$$\boldsymbol{Z}_6 = \boldsymbol{e}_0^T\boldsymbol{X}_4$$
$$\cdots$$
$$\boldsymbol{Z}_{2(lp-1)-2} = \boldsymbol{e}_0^T\boldsymbol{X}_{lp-1}$$

- ZMIENNE NIEPARZYSTE

$$\boldsymbol{Z}_1 = \boldsymbol{e}_R^T\boldsymbol{X}_0$$
$$\boldsymbol{Z}_3 = \boldsymbol{e}_R^T\boldsymbol{X}_1$$
$$\boldsymbol{Z}_5 = \boldsymbol{e}_R^T\boldsymbol{X}_2$$
$$\boldsymbol{Z}_7 = \boldsymbol{e}_R^T\boldsymbol{X}_3$$
$$\cdots$$
$$\boldsymbol{Z}_{2(lp-1)-1} = \boldsymbol{e}_R^T\boldsymbol{X}_{lp-2}$$

RÓWNANIA

Przepiszemy równania $(\mathbf{5.2})$ uwzględniając postac macierzy $\boldsymbol{A_s}$ i $\boldsymbol{B_s}$, oraz zdefiniujemy dwa zbiory wektorów $\boldsymbol{R+1}$-wymiarowych:

$$\boldsymbol{W^s = D_s^{-1}e_0 = [w_0^s, w_1^s, \cdots, w_R^s]^T},$$

$$\boldsymbol{V^s = D_s^{-1}e_R = [v_0^s, v_1^s, \cdots, v_R^s]^T}.$$

Mamy:

$$\boldsymbol{X_0 + b_R V^0 = \tilde{X}_0}$$

$$\boldsymbol{X_1 + a_{R+1} W^1 e_R^T X_0 + b_{2R+1} V^1 e_0^T X_2 = \tilde{X}_1}$$

$$\boldsymbol{X_2 + a_{2(R+1)} W^2 e_R^T X_1 + b_{3R+2} V^2 e_0^T X_3 = \tilde{X}_2} \tag{5.3}$$

$$\boldsymbol{X_3 + a_{3(R+1)} W^3 e_R^T X_2 + b_{4R+3} V^3 e_0^T X_4 = \tilde{X}_3}$$

$$\boldsymbol{X_4 + a_{4(R+1)} W^4 e_R^T X_3 = \tilde{X}_4}$$

Teraz równania $\mathbf{0, 1, 2, 3}$ z układu (5.3) mnożymy lewostronnie przez $\boldsymbol{e_R^T}$, zaś równania $\mathbf{1, 2, 3, 4}$ z układu (5.3) mnożymy lewostronnie przez $\boldsymbol{e_0^T}$. Jeśli uwzględnimy definicje zmiennych $\boldsymbol{Z_s}$, otrzymamy nieuporządkowany UKŁAD SCHURA:

$$\boldsymbol{b_R v_R^0 Z_0 + Z_1 = e_R^T \tilde{X}_0}$$

$$\boldsymbol{a_{R+1} w_R^1 Z_1 + b_{2R+1} v_R^1 Z_2 + Z_3 = e_R^T \tilde{X}_1}$$

$$\boldsymbol{a_{2(R+1)} w_R^2 Z_3 + b_{3R+2} v_R^2 Z_4 + Z_5 = e_R^T \tilde{X}_2}$$

$$\boldsymbol{a_{3R(R+1)} w_R^3 Z_5 + b_{4R+3} v_R^3 Z_6 + Z_7 = e_R^T \tilde{X}_3}$$

$$\boldsymbol{Z_0 + a_{R+1} w_0^1 Z_1 + b_{2R+1} v_0^1 Z_2 = e_0^T \tilde{X}_1}$$

$$\boldsymbol{Z_2 + a_{2(R+1)} w_0^2 Z_3 + b_{3R+2} v_0^2 z_2 = e_0^T \tilde{X}_2}$$

$$\boldsymbol{Z_4 + a_{3(R+1)} w_0^3 Z_5 + b_{4R+3} v_0^3 Z_6 = e_0^T \tilde{X}_3}$$

$$\boldsymbol{Z_6 + a_{4(R+1)} w_0^4 Z_7}$$

Najłatwiej uporządkować równania układu Schura, biorąc pod uwagę prawe strony.

- Równanie NR. 0: $\boldsymbol{e_R^T \tilde{X}_0}$
- Równanie NR. 1: $\boldsymbol{e_0^T \tilde{X}_1}$
- Równanie NR. 2: $\boldsymbol{e_R^T \tilde{X}_1}$
- Równanie NR. 3: $\boldsymbol{e_0^T \tilde{X}_2}$
- Równanie NR. 4: $\boldsymbol{e_R^T \tilde{X}_2}$
- Równanie NR. 5: $\boldsymbol{e_0^T \tilde{X}_3}$
- Równanie NR. 6: $\boldsymbol{e_R^T \tilde{X}_3}$
- Równanie NR. 7: $\boldsymbol{e_0^T \tilde{X}_4}$

Widać, że równania, z wyjątkiem zerowego i ostatniego, są parami przyporządkowane w kolejnym procesorom.

UPORZĄDKOWANY UKŁAD SCHURA

$$\boldsymbol{SS_0 Z_0 + Z_1 = e_R^T \tilde{X}_0}$$

$$\boldsymbol{Z_0 + SD_1 Z_1 + SB_1 Z_2 = e_0^T \tilde{X}_1}$$
$$\boldsymbol{SA_1 Z_1 + SS_1 Z_2 + Z_3 = e_R^T \tilde{X}_1}$$
$$\boldsymbol{Z_2 + SD_2 Z_3 + SB_2 Z_4 = e_0^T \tilde{X}_2}$$
$$\boldsymbol{SA_2 Z_3 + SS_2 Z_4 + Z_5 = e_R^T \tilde{X}_2}$$
$$\boldsymbol{Z_4 + SD_3 Z_5 + SB_3 Z_6 = e_0^T \tilde{X}_3}$$
$$\boldsymbol{SA_3 Z_5 + SS_3 Z_6 + Z_7 = e_R^T \tilde{X}_3}$$
$$\boldsymbol{Z_6 + SD_4 Z_7 = e_0^T \tilde{X}_4}$$

WSPÓŁCZYNNIKI

$$\boldsymbol{SD_s = a_{s(R+1)} w_0^s}$$
$$\boldsymbol{SB_s = b_{(s+1)R+s} v_0^s}$$
$$\boldsymbol{SA_s = a_{s(R+1)} w_R^s}$$
$$\boldsymbol{SS_s = b_{(s+1)R+s} v_R^s}$$

ALGORYTM LICZĄCY

1. Najpierw w każdym procesorze znajdujemy

   - pierwsze przybliżenie $\tilde{X}_s$
   - wektor W^s
   - wektor V^s

   Zauważmy, że można to zrobić rozwiązując układ równań z macierzą trójdiagonalną D_s i trzema prawymi stronami F_s, e_0 i e_R.

2. Nastepnie, używając na przykład polecenia $MPI\_Allgather()$, umieszczamy w każdym procesorze wszystkie współczynniki SD_s, SB_s, SA_s i SS_s i wszystkie elementy prawej strony równania Schura. Mając to wszystko rozwiązujemy układ Schura w każdym procesorze, obliczamy i wprowadzamy poprawki, wykorzystując do tego rozwiązanie $Z_0, Z_1, \cdots, Z_{2lp-3}$ układu Schura, oraz układ równań (5.3), który zapiszemy w trochę wygodniejszej postaci (jak zwykle dla przypadku $lp = 5$):

   RÓWNANIA DLA POPRAWEK

$$X_0 = \tilde{X}_0 - b_R V^0 Z_0$$

$$X_1 = \tilde{X}_1 - a_{R+1} W^1 Z_1 - b_{2R+1} V^1 Z_2$$

$$X_2 = \tilde{X}_2 - a_{2(R+1)} W^2 Z_3 - b_{3R+2} V^2 Z_4 \tag{5.4}$$

$$X_3 = \tilde{X}_3 - a_{3(R+1)} W^3 Z_5 - b_{4R+3} V^3 Z_6$$

$$X_4 = \tilde{X}_4 - a_{4(R+1)} W^4 Z_7$$

   W ten posób, w każdym z procesorów mamy część rozwiązania układu, która mu przypada w udziale.

3. W razie potrzeby można jeszcze użyć polecenia $MPI\_Gather()$, aby skomasować w jednym z procesorów całość rozwiązania.