WYKŁAD 2.

WPROWADZENIE
Ogólnie o zadaniach numerycznych z równań różniczkowych cząstkowych.

Będziemy zajmować się przybliżonym rozwiązywaniem **równań różniczkowych cząstkowych**. Rozwiązania równań, które nas interesują to funkcje, należące do pewnych przestrzeni funkcyjnych.
Do aproksymacji użyjemy metody różnic skończonych, a to prowadzi do rozwiązywania **równań różnicowych**, których rozwiązania leżą w zupełnie innych przestrzeniach niż rozwiązania, które mamy zamiar przybliżać.

Jak sobie z tym poradzić, tak żeby robić to świadomie?

Zapiszmy nasze równanie rózniczkowe razem z warunkami początkowymi i brzegowymi:

(2.1) $$\boldsymbol{Lu = f}$$

Niech rozwiązanie równania (3.1) należy do przestrzeni funkcyjnej unormowawnej $\boldsymbol{U}$ z normą $\|\cdot\|_{\boldsymbol{U}}$, zaś $\boldsymbol{f}$ do podobnej przestrzeni $\boldsymbol{F}$ z normą $\|.\|_{\boldsymbol{F}}$. Dla uproszczenia założymy, że dziedziny $\boldsymbol{u}$ i $\boldsymbol{f}$ sa jednakowe.

Teraz zapiszmy równanie różnicowe (zwane również **schematem różnicowym**):

(2.2) $$\boldsymbol{L_h u_h = f_h}$$

Rozwiązanie równania różnicowego $\boldsymbol{u_h}$ i jego prawa strona $\boldsymbol{f_h}$ należą do przestrzeni funkcji określonych na punktach siatki $\boldsymbol{X_h}$, nałożonej na dziedzinę funkcj $\boldsymbol{u}$ i $\boldsymbol{f}$, zaś "indeks" $\boldsymbol{h}$ jest maksymalnym krokiem siatki.

Ponieważ aproksymujemy $\boldsymbol{u}$, gdy $\boldsymbol{h \to 0}$, to mamy tu **rodziny przestrzeni funkcji siatkowych** $\boldsymbol{\{U_h\}_{h\to 0}}$ i $\boldsymbol{\{F_h\}_{h\to 0}}$.
Załóżmy jeszcze, że w przestrzeniach $\boldsymbol{U_h}$ i $\boldsymbol{F_h}$ działają normy $\|\cdot\|_{\boldsymbol{U_h}}$ i odpowiednio $\|\cdot\|_{\boldsymbol{F_h}}$. Będziemy więc aproksymować obiekt $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}$ rodziną obiektów $\boldsymbol{u_h} \in \boldsymbol{U_h}$, gdy "indeks" $\boldsymbol{h}$ dąży do zera.

Mamy dość skomplikowaną sytuację, bo obiekt aproksymowany leży w innej przestrzeni, niż obiekty, które mają go aproksymować!

Narzuca się pomysł, żeby umieścić u i u_h w tej samej przestrzeni.

Gdy zamierzamy aproksymować nasze zadanie różniczkowe przy pomocy metody różnic skończonych, wygodnie jest działać w przestrzeniach funkcji siatkowych U_h i F_h. Aby realizacja naszego pomysłu była możliwa, to musimy jakoś to "prawdziwe" rozwiązanie u umieścić w przestrzeniach U_h.
Do tego służy **"rodzina operatorów obcięcia"**

$$r_h : U \to U_h \tag{2.3}$$

Oznaczmy przez x_h punkty siatki X_h. Gdy u jest funkcją ciągłą, najprostszym przykładem takiech **obcięć** są operatory liniowe $r_h : u \to u_h$ zdefiniowane tak:

$$\forall x_h \in X_h, \quad (r_h u)(x_h) = u_h(x_h) = u(x_h). \tag{2.4}$$

Podobnie możemy postąpić z funkcjami f i f_h.

Załóżmy jeszcze, że przy wybranych operatorach obcięcia, normy $\|\cdot\|_U$ i $\|\cdot\|_{U_h}$ są zgodne, to znaczy że:

$$\forall_{u \in U} \quad \|r_h u\|_{U_h} \to \|u\|_U \text{ gdy } \mathrm{h} \to 0. \tag{2.5}$$

Podobnie dla norm $\|\cdot\|_{F_h}$ i $\|\cdot\|_F$.

Zdefiniujemy teraz pojęcie zbieżności schematu różnicowego:
ZBIEŻNOŚĆ.
Schemat różnicowy (2.2) jest zbieżny, gdy

$$\forall_u \ \|r_h u - u_h\|_{U_h} \to 0, \text{ dla } \mathrm{h} \to 0. \tag{2.6}$$

Porzebne będą jeszcze dwa pojęcia:

APROKSYMACJA.
Schemat (2.2) aproksymuje równanie (2.1) z rzędem $q \geq 1$, jeśli

$$\|L_h r_h u - f_h\|_{F_h} = O(h^q). \tag{2.7}$$

STABILNOŚĆ.
Schemat (2.2) jest stabilny, jeśli dla h dostatecznie małych

- ma on jednoznaczne rozwiązanie dla dowolnych $f_h \in F_h$
- istnieje stała $M > 0$ niezależna od h, taka, że zachodzi oszacowanie:

(2.8)
$$\|u_h\|_{U_h} \leq M\|f_h\|_{F_h}$$

Twierdzenie P.D. Lax'a.[1]
Jeśli schemat **(2.2)** *aproksymuje równanie* **(2.1)** *z rzędem* $q > 1$*, oraz jeśli jest stabilny, to jest zbieżny z tym samym rzędem* q *co aproksymacja.*

DOWÓD. (jest bardzo prosty, więc go tu przytaczam.)
Mamy:

(2.1)
$$Lu = f$$

(2.2).
$$L_h u_h = f_h$$

Ze względu na aproksymację

(2.9)
$$\|L_h r_h u - f_h\|_{F_h} = O(h^q).$$

Podstawmy do równania (2.9) f_h z równania (2.2); otrzymamy:

$$\|L_h(r_h u - u_h)\|_{F_h} = O(h^q).$$

Ze względu na stabilność, otrzymamy oszacowanie:

$$\|r_h u - u_h\|_{U_h} \leq MO(h^q),$$

a ten ostatni związek oznacza zbieżność z rzędem q. □

KOMENTARZ.
Całe to "wprowadzenie" napisałem po to, aby ci z Państwa, którzy nie mieli do czynienia z numeryką w równaniach rózniczkowych, mogli szybko zorientować

[1] Peter David Lax, matematyk amerykański urodzony 1 maja 1926

się w tym, o czym mam zamiar Państwu mówic na tych zajęciach. Nie będą to tylko numeryczne równania rózniczkowe czastkowe, ale spośród tematów które chciałbym poruszyć, ten zapewne wymaga trochę szerszego omówienia.

Prosze się nie niepokoić. Będziemy zajmować się tylko bardzo prostymi zadaniami, które mają pokazać jak możnaby efektywnie wykorzystywać klaster przy zadaniach z tej branży. I w gruncie rzeczy będzie to sprowadzało się głównie do algebry liniowej.

Wróćmy teraz do tego "wprowadzenia". Zbieżność schematu jest podstawową własnoscią, którą powinien mieć schemat, aby nadawał się do użytku. Na ogół jest bardzo trudno udowodnić bezpośrednio, że schemat, który chcielibyśmy zastosować jest zbieżny. **Twierdzenie Laxa** trochę nam to zadanie ułatwia, dzieląc pracę na dwie częsci. Zwykle łatwo jest stwierdzić jaki jest rząd aproksymacji schematu (czesto mowimy poprostu "rząd schematu"), jeśli zadamy sobie trochę trudu i przypomnimy sobie jak wyglada Twierdzenie Taylora, a potem je zastosujemy. Druga część, naogól trudniejsza, to udowodnienie stabilności.

Nasze zajmowanie się równaniami różniczkowymi cząstkowymi zaczniemy od bardzo prostego zadania liniowego, ewolucyjnego. Wogóle, dlaczego odrazu zaczynać od równań cząstkowych a nie od zwyczajnych? Wybrałem tak, bo na zadaniach z równań cząstkowych udaje się często dość efektywnie wykorzystać wieloprocesorowość, a ponadto wielka liczba zastosowań matemetyki w różnych dziedzinach sprowadza sie do rozwiązywania takich równań. Nie mogę robić tu wykładu teorii równań cząstkowych. To o czym będziemy tu mówić, traktuję jako proste przykłady mające zapoznać Państwa z techniką pracy numeryka w dziedzinie równań cząstkowych. Poważne problemy oczywiście wymagają znacznie głębszej znajomości teorii. To czego będziemy potrzebowali do tych prostych przykładów, omówimy na częsci nielaboratoryjnej naszych zajęć.