Rozwiązanie zadania 3. i kryteria oceny

8 czerwca 2012

Rozwiązanie

Podpunkt A

Macierze A i B rozszerzamy w prawo i dół, dopisując zera, tak by liczba kolumn stała się wielokrotnością n. Zauważmy, że nie wpływa to na ich iloczyn i tylko nieznacznie zwiększa ich rozmiar. Dalej bez straty ogólności zakładam, że m jest podzielne przez n.

Teraz macierz A możemy podzielić na $\frac{m}{n}$ macierzy $n \times n$ $A_1, \ldots, A_{\frac{m}{n}}$ (każda A_i składa się z n kolejnych kolumn A). Podobnie dzielimy B na $B_1, \ldots, B_{\frac{m}{n}}$, z tym że tutaj każda B_i składa się z kolejnych wierszy B.

Iloczyn AB jest równy $A_1B_1 + A_2B_2 + \ldots A_{\frac{m}{n}}B_{\frac{m}{n}}$, zatem można go obliczyć w czasie $O(\frac{m}{n}n^\omega) = O(mn^{\omega-1})$ ($\frac{m}{n}$ mnożeń i dodawań macierzy $n \times n$).

Podpunkt B

Grupą nazwiemy zbiór elementów o takiej samej wartości, które znajdują się w jednej kolumnie macierzy A. Zbiór grup w każdej kolumnie możemy prosto znaleźć przez sortowanie w czasie $O(mn \log n)$.

Grupę nazwiemy *dużą*, jeśli składa się z więcej niż n^α elementów. Wartość $\alpha \in [0, 1]$ dobierzemy później. W przeciwnym razie grupa jest *mała*.

Część I W pierwszej części algorytmu znajdziemy wszystkie pary wierszy, które mają w pewnej kolumnie tę samą liczbę i ta liczba (w tej kolumnie) należy do małej grupy. To robimy zupełnie brutalnie: dla każdej małej grupy przeglądamy wszystkie pary elementów w tej grupie.

Oszacujemy osobno czas działania dla każdej kolumny. Ustalmy kolumnę. Niech rozmiary małych grup w tej kolumnie to $a_1, \ldots, a_k$. Liczba par do przejrzenia jest ograniczona z góry przez

$$\sum_{i=1}^{k} a_i^2$$

Wiemy, że

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \leq n$$

oraz

$$a_i \leq n^\alpha \quad \text{dla każdego } i = 1, \ldots, k$$

Zatem

$$\sum_{i=1}^{k} a_i^2 \leq \sum_{i=1}^{k} a_i n^\alpha = n^\alpha \sum_{i=1}^{k} a_i \leq n^{1+\alpha}$$

Skorzystaliśmy kolejno z drugiej i pierwszej wcześniej wymienionej własności.

Zatem Cześć I wymaga czasu $O(mn^{1+\alpha})$.

Część II Teraz czas na znalezienie par wierszy, które mają wspólny element w tej samej kolumnie i element ten należy do dużej grupy.

Skonstruujemy macierz B. Przeglądamy kolejne duże grupy w macierzy A. W jednej kolumnie macierzy może znajdować się co najwyżej $n^{1-\alpha}$ dużych grup (bo ich rozmiar to co najmniej n^α), zatem w całej macierzy dużych grup jest co najwyżej $mn^{1-\alpha}$.

Spójrzmy na pewną dużą grupę która znajduje się w pewnej kolumnie macierzy A. Zamieńmy liczby należące do tej grupy na 1, a pozostałe liczby na 0. Otrzymamy kolumnę wysokości n, która składa się z jedynek i zer.

Wszystkie te kolumny (tj. zbudowane dla wszystkich dużych grup we wszystkich kolumnach) ustawmy obok siebie w dowolnej kolejności. W ten sposób powstaje macierz B.

Następnie obliczamy

$$W = B \cdot B^T.$$

W to macierz rozmiaru $n \times n$. Popatrzmy na pole w i-tym wierszu i j-tej kolumnie. Jest ono równe iloczynowi skalarnemu i-tego i j-tego wiersza B. Iloczyn taki jest niezerowy wtw. gdy istnieje współrzędna, na której w obydwóch wierszach stoją jedynki. Czyli te wiersze mają w pewnej kolumnie elementy należące do tej samej dużej grupy. To oznacza, że obliczenie W rozwiązuje część II.

Macierz B ma rozmiar $n \times mn^{1-\alpha}$. Przy użyciu wyniku z części I, W możemy obliczyć w czasie $O(mn^{1-\alpha}n^{\omega-1}) = O(mn^{\omega-\alpha})$. Konstrukcja macierzy B jest istotnie szybsza.

Łączymy części Pozostaje dobrać wartość α, która zminimalizuje czas działania wyrażony przez:

$$O(mn^{1+\alpha} + mn^{\omega-\alpha})$$

Łatwo zauważyć, że najlepszym wyborem jest średnia arytmetyczna wykładników, czyli $\alpha = (\omega+1)/2$. Tym samym, całe rozwiązanie działa w czasie

$$O(mn^{(\omega+1)/2})$$

Kryteria oceny

Wszystkie rozwiązania podpunktu a, które sprawdziłem, wyglądały poprawnie. W części b przyjąłem następujące zasady:

- -3 punkty za algorytm $O(mn^{\omega-1/2})$. Najczęściej po prostu z powodu przyjęcia $n^\alpha = \sqrt{n}$.
- -1 punkt za błędne szacowanie działania tego, co opisałem jako część I. Częsty błąd polegał na przyjęciu, że małych grup jest co najwyżej $n^{1-\alpha}$ lub stwierdzeniu, że „wtedy jest najgorzej” bez uzasadnienia.
- Nie odejmowałem punktów za niepotrzebne logarytmy w złożoności. Warto jednak zauważyć, że do przechowywania wyniku najlepiej nadaje się tablica $n \times n$ (a nie drzewo AVL, które ma narzut logarytmiczny).