# Znajdowanie cyklu o ujemnej wadze

17 lutego 2012

Na wejściu dany jest graf skierowany $G = (V, E)$, $|V| = n$, $|E| = m$. Krawędziom grafu przypisujemy wagi $w_{uv}$ będące liczbami rzeczywistymi. Naszym zadaniem jest znalezienie w tym grafie cyklu o ujemnej wadze.

Zakładamy, że istnieje wierzchołek $s$, z którego wszystkie inne wierzchołki są osiągalne. Możemy to zapewnić: wystarczy dodać nowy wierzchołek i połączyć go krawędziami o wadze 0 ze wszystkimi innymi wierzchołkami w grafie. Ta operacja nie stworzy, ani nie zlikwiduje żadnego cyklu o ujemnej wadze.

Będziemy wykorzystywać nieco zmodyfikowany algorytm Bellmana-Forda. Zamiast $n-1$ iteracji, wykonamy ich $n$, a ponadto będziemy zapamiętywać (w tablicy $in$) krawędź, po której poprawiamy odległości do wierzchołka.

**for** $i = 1 \dots n$ **do**
  $d[i] := \infty$
  $in[i] :=$ null
$d[s] := 0$
**for** $i = 1 \dots n$ **do**
  **for** $uv \in E$ **do**
    **if** $d[v] > d[u] + w_{uv}$ **then**
      $d[v] := d[u] + w_{uv}$
      $in[v] := uv$

Przypominam, że instrukcję $d[v] := d[u] + w_{uv}$ nazywamy *relaksacją* krawędzi $uv$. Czasem, jeśli nieistotna będzie sama krawędź, będziemy mówić o relaksacji wierzchołka $v$.

Zgodnie z tym, co pokazaliśmy na zajęciach, po wykonaniu $k$ obrotów zewnętrznej pętli, $d[v]$ jest nie większe niż długość najkrótszej marszruty[1] z $s$ do $v$, która składa się z co najwyżej $k$ krawędzi. Poza tym $d[v]$ jest *równe* długości pewnej (być może składającej się z większej liczby krawędzi) marszruty z $s$ do $v$. Jeśli w grafie nie ma cykli o ujemnej wadze, to odległości od $s$ są dobrze określone i po $n$ iteracjach tablica $d$ będzie zawierać odległości od $s$. W takim przypadku wystarczyłoby nawet $n-1$ iteracji, bo ścieżki z $s$ składają się z co najwyżej $n-1$ krawędzi.

Inaczej będzie, jeśli w grafie istnieje cykl o ujemnej wadze. Wówczas w każdej iteracji zewnętrznej pętli wykonamy co najmniej jedną relaksację krawędzi. Skąd to wiemy? Skoro do pewnych wierzchołków istnieją dowolnie krótkie ścieżki, to wartości w tablicy $d$ będą się zmniejszać w nieskończoność. Nie może być jednak tak, że w jakiejś iteracji zewnętrznej pętli nie wykonamy żadnej relaksacji, bo jeśli raz sprawdzimy, że warunek z instrukcji `if` nie jest spełniony dla wszystkich krawędzi, to już zawsze tak będzie. Zatem będziemy relaksować krawędzie w ***każdej*** iteracji zewnętrznej pętli.

Po wykonaniu tego algorytmu, dla każdego wierzchołka mamy zaznaczoną co najwyżej jedną krawędź do niego wchodzącą. Pokażemy teraz, że jeśli zaznaczymy jakiś cykl, to jest to cykl o ujemnej wadze w oryginalnym grafie. Następnie przekonamy się również, że w grafie z cyklem o ujemnej wadze, jakiś cykl zostanie zaznaczony.

**Zaznaczony cykl ma ujemną wagę** Załóżmy, że znajdziemy cykl długości $k$ składający się kolejno z wierzchołków $v_1, v_2, \dots, v_k$. Dla wygody, na $v_1$ będziemy czasem mówić $v_{k+1}$. Po wykonaniu całego algorytmu, dla każdego $i = 1 \dots k$ zachodzi nierówność

$$d[v_{i+1}] \geq d[v_i] + w_{v_i v_{i+1}}.$$

Skąd się ona bierze? Tuż po zrelaksowaniu wierzchołka $v_{i+1}$ zachodzi (dla aktualnych wartości w tablicy $d$) $d[v_{i+1}] = d[v_i] + w_{v_i v_{i+1}}$. Skoro zaznaczona krawędź odpowiadała *ostatniej* relaksacji krawędzi wchodzącej do $v_{i+1}$, to od tego momentu $d[v_{i+1}]$ już się nie zmieni. Zmienić może się jedynie $d[v_i]$, przy czym może ono tylko zmaleć.

Jeśli zsumujemy powyższe nierówności dookoła całego cyklu, dostaniemy

$$\sum_{i=1}^{k} d[v_i] \geq \sum_{i=1}^{k} d[v_i] + \sum_{i=1}^{k} w_{v_i v_{i+1}}$$

[1] Mówiąc nieformalnie, marszruta to ścieżka w grafie, w której dopuszczamy wielokrotne przejście tej samej krawędzi lub tego samego wierzchołka.

czyli

$$\sum_{i=1}^{k} w_{v_i v_{i+1}} \leq 0.$$

To już prawie to, o co nam chodzi, ale nierówność jest nieostra. Z tym możemy sobie jednak łatwo poradzić. Wystarczy zauważyć, że co najmniej jedna z sumowanych nierówności jest ostra. W szczególności, jeśli spojrzymy na moment, w którym w grafie zaznaczamy *pierwszą* z krawędzi na cyklu, to zaraz po tym zaznaczeniu mamy $d[v_{i+1}] = d[v_i] + w_{v_i v_{i+1}}$, ale wiemy, że wierzchołek $v_i$ zostanie jeszcze w przyszłości zrelaksowany, czyli na samym końcu nierówność będzie ostra. Dostajemy więc, że otrzymany cykl ma ujemną wagę.

**Znajdowanie cyklu o ujemnej wadze** Po wykonaniu $n$ iteracji, każdy wierzchołek, być może poza $s$, ma przypisaną krawędź, po której wykonaliśmy jego ostatnią relaksację. $s$ zostało zrelaksowane bądź nie — zależy to od tego, czy leży na cyklu o ujemnej wadze. Zaznaczmy wszystkie te krawędzie i ograniczmy do nich naszą uwagę.

Spójrzmy na dowolną krawędź $uv$, która została zrelaksowana w $n$-tej iteracji. Pokazaliśmy wcześniej, że w grafie z cyklem o ujemnej wadze taka krawędź musi istnieć. Możemy zacząć cofać się po zaznaczonych krawędziach od wierzchołka $v$. Mamy teraz dwie możliwości. Albo po pewnym czasie trafimy na cykl, albo też wrócimy do wierzchołka $s$ i tam utkniemy, bo nie będzie on miał zaznaczonej żadnej krawędzi wchodzącej.

Druga możliwość jest jednak jedynie pozorna — okazuje się, że nie może zachodzić. Dla dowodu przyjmijmy, że taka ewentualność zaszła, wyprowadzimy stąd sprzeczność.

Sytuacja wygląda następująco. Wiemy, że dojście do $v$ marszrutą o długości $d[v]$ (lub mniejszej) wymaga przejścia po co najmniej $n$ krawędziach. Dzieje się tak, ponieważ aktualna wartość $d[v]$ ustaliła się dopiero w $n$-tej iteracji zewnętrznej pętli. Jednocześnie do wierzchołka $v$ prowadzi ścieżka z zaznaczonych krawędzi, która składa się oczywiście z nie więcej niż $n - 1$ krawędzi. Pokażemy teraz, że jest ona nie dłuższa niż $d[v]$, co doprowadzi nas do sprzeczności.

Oznaczmy wierzchołki na zaznaczonej ścieżce przez $s = v_1, v_2, \ldots, v_k = v$. Podobnie jak wcześniej wiemy, że dla każdego $i = 1 \ldots, k - 1$

$$d[v_{i+1}] \geq d[v_i] + w_{v_i v_{i+1}}.$$

Te nierówności sumujemy po całej ścieżce i dostajemy

$$\sum_{i=1}^{k-1} d[v_{i+1}] \geq \sum_{i=1}^{k-1} d[v_i] + \sum_{i=1}^{k-1} w_{v_i v_{i+1}},$$

czyli, po odjęciu $\sum_{i=2}^{k-1} d[v_i]$ od obydwóch stron,

$$d[v_k] \geq d[v_1] + \sum_{i=1}^{k-1} w_{v_i v_{i+1}}.$$

Wiemy też, że $d[v_1] = d[s] = 0$, bo $s$ nie leży na cyklu o ujemnej wadze. Zatem dostajemy $d[v_k] \geq \sum_{i=1}^{k-1} w_{v_i v_{i+1}}$, czyli obiecaną sprzeczność.

W grafie znajdziemy więc cykl z zaznaczonych krawędzi i, jak się wcześniej przekonaliśmy, będzie to cykl o ujemnej wadze.